Analysis

1. Grundlagen

Def. Skalarprodukt : $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Def. Produktmenge : $A \times B = \{(a,b) : a \in A\, , b \in B\}$

Def. Eulersche Konstante : $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Def. Binomialkoeffizient : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{0} = 1$

Rechenregeln : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beispielgrenzwerte für Zahlenfolgen :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Prinzip des Induktionsbeweises :

- Induktionsanfang : Die Gültigkeit der Aussage für den Startwert zeigen .
- Induktionsvoraussetzung : Aussage sei für beliebiges n bewiesen .
- Induktionsbehauptung : Aussage gilt auch für n+1 .
- Induktionsbeweis : Die Behauptung beweisen (unter Einbeziehung der Voraussetzung) .

Binomialsatz : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Bernoullische Ungleichung : $(1+x)^n \geq 1+nx$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung : $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i|\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

Def. Potenzfunktionen : $f : x \to x^p$

Def. Exponentialfunktionen : $g : x \to a^x$

TODO pic S19

Def. Logarithmus :

Ist $a > 1$ und $b > 0$, so besitzt die Gleichung $a^x = b$ genau eine Lösung .
Diese Lösung ist $\log_a b$.

Def. : $C^m(G)$ ist die Menge aller Funktionen $f : G \to R$, deren partielle Ableitungen der Ordnung $\leq m$ alle vorhanden und stetig sind .

Peano-Axiome :

1. Null ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl besitzt einen eindeutig bestimmten Nachfolger.
3. Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
4. Die Zahl Null ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

Trichotomiegesetz :

Für je zwei reelle Zahlen a,b gilt genau eine der folgenden Aussagen :

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b \ .$$

Def. obere Schranke / untere Schranke :

$A \subset R \quad , \quad A \neq \varnothing$

$x \in R$ heißt obere Schranke der Menge A , wenn gilt : $\forall y \in A \ \ y \leq x$ bzw.

$x \in R$ heißt untere Schranke der Menge A , wenn gilt : $\forall y \in A \ \ y \geq x$

Anmerkung :

Die kleinste aller oberen Schranken von A heißt **Supremum** von A , $\sup A$.

Die größte aller unteren Schranken von A heißt **Infimum** von A , $\inf A$.

Def. beschränkte Menge :

Besitzt A eine obere und eine untere Schranke, so heißt A **beschränkt**.

Def. Gammafunktion : $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dx \qquad , \ x > 0$

Die Eulersche Gammafunktion stellt die Verallgemeinerung des Fakultätsbegriffes in bezug auf die Menge der komplexen Zahlen dar. Alle Gesetze für Fakultäten gelten auch für die Gammafunktion. D.h. z.B. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ und $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Multiplikationssatz : $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \qquad \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren :

Aus einer Basis $b_1,...,b_n$ kann man wiefolgt eine orthonormale Basis $u_1,...,u_n$ konstruieren :

Man definiert sukzessive

$$\tilde{u}_j = b_j - \sum_{k<j} \langle b_j, u_k \rangle u_k \qquad , \qquad u_j = \frac{\tilde{u}_j}{|\tilde{u}_j|} \qquad \text{für } k = 1,...,n$$

Beispiel :

Die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Orthonormale Basis konstruieren :

$$\tilde{u}_1 = b_1 = (1,2,2)^T \qquad u_1 = \tilde{u}_1 / |\tilde{u}_1| = \frac{1}{3}(1,2,2)^T$$

$$\tilde{u}_2 = b_2 - \langle b_2, u_1 \rangle u_1 = (3,3,0)^T - 3\frac{1}{3}(1,2,2)^T = (2,1,-2)^T \qquad u_2 = \tilde{u}_2 / |\tilde{u}_2| = \frac{1}{3}(2,1,-2)^T$$

$$\tilde{u}_3 = b_3 - \langle b_3, u_1 \rangle u_1 - \langle b_3, u_2 \rangle u_2 = (9,0,0)^T - 3\frac{1}{3}(1,2,2)^T - \underbrace{\sqrt{\frac{9 \cdot 2}{3}}}_{=\sqrt{6}} \frac{1}{3}(2,1,-2)^T = ...$$

2. Logik

Kontraposition : $A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \Rightarrow \neg B$

3. Komplexe Zahlen

$z = a + ib \qquad = r \cdot e^{ij}$, $r =$ Betrag von z , $j = \arg z$

(d.h. $a = r\cos j$ und $b = r\sin j$)

Rechenregeln :

$$(a_1, b_1) \pm (a_2, b_2) = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2 \, , \, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Dreiecksungleichung :

$\forall z_1, z_2 \in C$ gilt : $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Eulersche Beziehung :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

!! In C gibt es keine Ordnungsrelationen . **!!**

Def. e -Umgebung : $U_e(z_0) := \{ z : |z - z_0| < e \}$, $e > 0$

4. Abzählbarkeit von Mengen

Zwei nichtleere Mengen A und B heißen **gleichmächtig** , wenn es eine bijektive Abb. von A auf B gibt .
Eine Menge heißt **abzählbar** , wenn sie gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen ist .
Eine Menge heißt **überabzählbar** , wenn sie weder endlich noch abzählbar ist .

Eine aus endlich vielen Elementen bestehende Menge heißt **endliche Menge** mit **Kardinalzahl** n .
Zwei gleichmächtige Mengen haben die gleiche Kardinalzahl .

Satz :

1. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist wieder abzählbar , oder aber sie ist endlich .
2. Jede unendliche Menge besitzt eine endliche Teilmenge .
3. A, B seien abzählbare Mengen , dann ist auch $A \times B$ abzählbar .

Satz :

Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis :

Cantorsches Diagonalverfahren :
Anordnung der Brüche in einem zweidimensionalen Schema.
Somit haben wir eine bijektive Abbildung erhalten, da wir die Brüche durchzählen können:
1/1 |-> 1 , 2/1 |-> 2 , 1/2 |-> 3 , 2/2 |-> 4 , 3/1 |-> 5...
(Zwar werden einige Zahlen doppelt dargestellt (1/1=2/2=3/3), womit wir eigentlich nur gezeigt haben, dass die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen größer als die der rationalen Zahlen ist oder gleich.
Da die Umkehrung trivialerweise gilt, folgt die Behauptung).

TODO Pic S.9

Zuordnung zwischen der Menge $N \rightarrow Q^+$ - Bijektion

$\Rightarrow$ positive rationale Zahlen sind abzählbar

$\Rightarrow$ Q ist abzählbar .

Satz :

Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.
Jede reelle Zahl lässt sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch schreiben.

Kontinuumshypothese : $\nexists M : \text{card } N < \text{card } M < \text{card } R$

5. Zahlenfolgen

Def. Zahlenfolge :

Eine Funktion $a : N \to C$ heißt komplexe Zahlenfolge $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Def. Nullfolge :

Eine Zahlenfolge heißt Nullfolge, wenn zu jedem $e > 0$ ein Index $N(e)$ existiert, so dass $\forall n > N(e)$ gilt : $|a_n| < e$.

Def. beschränkte Zahlenfolge :

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt , wenn die Menge $\{|a_n| : n \in I\}$ beschränkt ist .

Satz :

a_n, b_n seien Nullfolgen . (a_n) sei eine beschränkte Zahlenfolge, dann gilt :
$(a_n + b_n)$ ist eine Nullfolge und $(a_n \cdot b_n)$ ist eine Nullfolge .

Def. konvergente / divergente Zahlenfolge :

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **konvergent** , wenn eine komplexe Zahl $a \in C$ existiert , so dass $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist.
Jede Zahlenfolge , die nicht konvergiert , heißt **divergent** .

Def. bestimmte Divergenz :

Die reelle Zahlenfolge (a_n) divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$, wenn zu jeder positiven reellen Zahl k ein $n_0(k)$ existiert , so dass $a_n > k$ für alle $n \geq n_0(k)$.

Satz :

Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt und der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

Sandwichtheorie :

$a_n \to a$, $b_n \to a$, $a_n \leq c_n \leq b_n$ reelle Zahlenfolgen .
Dann gilt : $c_n \to a$.

Beispiele :

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n+c}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{n}{n}+\frac{a}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{c}{n}}\right)=1$

Def. monoton wachsende / fallende Zahlenfolge :

Eine reelle Zahlenfolge heißt monoton wachsend / fallend, wenn für alle n ab einem gewissen Index n_0 gilt :

$a_{n+1} \geq a_n \ / \ a_{n+1} \leq a_n$.

Satz :

Eine reelle Zahlenfolge sei monoton wachsend und nach oben beschränkt , dann ist sie konvergent .

Def. Häufungspunkt :

Eine Zahl $P \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt einer Zahlenfolge (a_n) , wenn in jeder e -Umgebung von P unendlich viele Glieder der Zahlenfolge liegen .

Beispiel :

1. $\left(a_n = (-1)^n\right)_{n=0}^{\infty}$ nicht konvergent ; Häufungspunkte sind –1 und 1 .

2. $\left(a_n = n\right)_{n=0}^{\infty}$ keine Häufungspunkte

Satz von Bolzano / Weierstraß (im R^n) :

- Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge .
- Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt mindestens einen Häufungspunkt .
- Eine reelle , beschränkte Zahlenfolge besitzt einen kleinsten und einen größten Häufungspunkt und ist konvergent genau dann , wenn kleinster und größter HP zusammenfallen .

Def. limes superior / inferior :

Den größten Häufungspunkt einer beschränkten, reellen Zahlenfolge nennt man limes superior $(\lim\ \sup\ a_n)$.

Den kleinsten Häufungspunkt nennt man limes inferior $(\lim\ \inf\ a_n)$.

Satz (Cauchy-Kriterium) :

Eine Zahlenfolge ist genau dann konvergent , wenn $\forall e > 0$ ein $N(e)$ existiert , so dass gilt :

$|a_n - a_m| < e$, falls $n, m > N(e)$.

Derartige (konvergente) Folgen heißen Fundamentalfolgen oder auch Cauchy-Folgen .

Beispiel :

$\left(a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}\right)_{n=1}^{\infty}$, a_n ist monoton wachsend

Angenommen , a_n ist konvergent , dann ist a_n Cauchy-Folge.

$$a_{2n} - a_n = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ keine Cauchy-Folge , d.h. nicht konvergent

Def. Intervallschachtelung :

a_n, b_n seien reelle Zahlenfolgen , $\forall n : a_n \leq b_n$, a_n monoton wachsend , b_n monoton fallend und $(b_n - a_n)$ Nullfolge. Dann bilden (a_n) und (b_n) eine Intervallschachtelung $\langle a_n, b_n \rangle$.

Satz :

Eine Intervallschachtelung $\langle a_n, b_n \rangle$ definiert genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit :

1. $\forall_n x \in [a_n, b_n]$
2. $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

6. Unendliche Reihen

Def. unendliche Reihe :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt unendliche Reihe , $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ heißt n-te Partialsumme .

Die Reihe konvergiert , wenn die Zahlenfolge der Partialsummen (s_n) konvergiert .

Beispiele :

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$, $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ ist divergent nach Cauchy-Kriterium

2. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{C}$, $\underline{|q| < 1}$, $s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + ... + q^n$

$$q \cdot s_n = q + q^2 + ... + q^{n+1}$$

$$s_n - q \cdot s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 0$$ die Reihe ist also konvergent.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$ ist die sogenannte geometrische Reihe ($|q| < 1$) .

Satz (Cauchy-Kriterium) :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent , wenn zu jedem $e > 0$ ein $N(e)$ existiert , so dass gilt :

$|s_n - s_m| < e$, falls $n, m > N(e)$.

Satz (notwendiges Kriterium für unendliche Reihen) :

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert , dann gilt : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bemerkung :

Kriterium ist nicht hinreichend , denn z.B. : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ $\Rightarrow$ keine Aussage möglich

Satz :

Aus absoluter Konvergenz folgt die normale Konvergenz .

Satz :

Eine Reihe mit positiven Gliedern ist genau dann konvergent , wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Beispiel : Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} a \le 0 : \text{divergent} \\ 0 < a \le 1 : \text{divergent} \\ a > 1 : \text{konvergent} \end{cases} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Satz (Majoranten-Kriterium) :

$\sum a_n , \sum c_n$ seien Reihen mit positiven Gliedern , wobei $\forall n : 0 < a_n \le c_n$ gelte . $\sum c_n$ sei konvergent .
Dann konvergiert auch $\sum a_n$ und es gilt $\sum a_n \le \sum c_n$.

Satz (Minoranten-Kriterium) :

$\sum b_n , \sum d_n$ seien Reihen mit positiven Gliedern , $\forall n : d_n \le b_n$ und $\sum d_n$ sei divergent .
Dann divergiert auch $\sum b_n$.

Beispiele :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+7}$ notwendiges Kriterium erfüllt . $\frac{1}{3n+7} > \frac{1}{4n}$ falls n hinreichend groß

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ unbeschränkt

Die Summe $\sum \frac{1}{4n}$ ist divergente Minorante .

Satz (Wurzel-Kriterium) :

Ist mit einer festen positiven Zahl $0 < q < 1$ fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert die Reihe absolut .
Gilt jedoch fast immer oder auch nur unendlich oft $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$, so ist die Reihe divergent .

Beispiel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad - \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2} < 1 \qquad \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

Satz (Quotienten-Kriterium) :

Ist mit einer festen positiven Zahl $0 < q < 1$ fast immer $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, so konvergiert die Reihe absolut .

Gilt jedoch fast immer $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, so ist die Reihe divergent .

ACHTUNG :

Kommen die Wurzeln bzw. Quotienten des Wurzel-Kriteriums bzw. Quotienten-Kriteriums beliebig nahe an 1 heran , so bringen die beiden Kriterien keine Entscheidung.
Es ist unumgänglich eine feste Zahl q aufzufinden .

Beispiel :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent , $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, keine Aussage möglich .

Satz (Vergleich des Wurzel- und Quotientenkriteriums) :

Sei (a_n) eine Folge positiver Zahlen , dann gilt :

1.) $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

2.) $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{a_n}$

D.h. , wenn das Quotientenkriterium keine Aussage liefert , so vielleicht das Wurzelkriterium .

Satz (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) :

Strebt a_n von oben gegen 0 , d.h. $\forall n : |a_{n+1}| < |a_n|$, so ist die alternierende Reihe konvergent .

Beispiel :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent .

Satz (Rechnen mit konvergenten Reihen):

$\sum a_n , \sum b_n$ seien konvergente Reihen und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt :
$\sum (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum a_n + c_2 \sum b_n$, insbesondere konvergiert diese Reihe ebenfalls .

Satz :

In einer konvergenten Reihe darf man beliebig Klammern setzen .
Schon vorhandene Beklammerungen dürfen jedoch dann und nur dann weggelassen werden , wenn die so entstehende (unbeklammerte) Reihe wieder konvergiert .

Def. Umordnung :

$\sum b_n$ heißt eine Umordnung von $\sum a_n$, wenn eine Bijektion Φ von N auf N existiert , so dass gilt : $b_n = a_{\Phi(n)}$.

Satz :

Ist $\sum a_n$ absolut konvergent , dann ist auch jede Umordnung der Reihe absolut konvergent und hat dieselbe Summe .

Großer Umordnungssatz :

$M = \bigcup_{j=1} I_j \quad , \quad I_i \cap I_j = \emptyset \quad für\ i \neq j \qquad ,$

$\sum_{a \in M} a_a$ sei absolut konvergent . Dann gilt für jede beliebige Zerlegung von M :

$\sum_{a \in M} a_a = \sum_{i=1} \sum_{a \in I_i} a_a$.

Def. Cauchysche Produktreihe :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n , \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien gegeben , dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i$ Cauchysche Produktreihe der beiden Reihen .

Satz (Cauchy-Produkt) :

Sind $\sum a_n , \sum b_n$ absolut konvergent , so gilt :

$\left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right) = \sum_{n=0} \sum_{i=0} a_{n-i} b_i = \sum_{i,j=0} a_i b_j = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_0 b_n + ... + a_n b_0\right)$ = ebenfalls absolut konvergent .

Grundreihen :

Die harmonischen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sind für $a \leq 1$ divergent und für $a > 1$ konvergent .

Bsp. : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ = divergent $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{p^2}{6}$

7. Reelle Funktionen einer reellen Variablen

7.1 Stetige Funktionen

Def. :

Die Funktion f ist an einer Stelle x ihres Definitionsbereiches X **stetig** , wenn für jede Folge (y_n) aus X , die gegen x strebt , immer auch $f(y_n) \to f(x)$ konvergiert .

Beispiel :

$f(x) = \begin{cases} -1 , x \leq 0 \\ 1 \quad , x > 0 \end{cases}$ ist in 0 unstetig , da z.B. $\frac{1}{n} \to 0$, aber $f\left(\frac{1}{n}\right)$ nicht $\to f(0)$ strebt .

Satz :

Die Betragsfunktion , Polynome , rationale Funktionen , Exponentialfunktionen , Logarithmusfunktionen und Potenzfunktionen sind ausnahmslos an jeder Stelle ihres jeweiligen Definitionsbereiches stetig .

Delta-Definition der Stetigkeit :

Eine Funktion $f : X \subseteq R \to R$ ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig , wenn zu jedem $e > 0$ ein $d(e) > 0$ existiert , so dass gilt :

$|f(x) - f(x_0)| < e$, falls $|x - x_0| < d$.

Def. gleichmäßige Stetigkeit :

Eine Funktion $f : X \subseteq R \to R$ ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig , wenn zu jedem $e > 0$ ein $d(e) > 0$ existiert , so dass gilt :

$|f(x) - f(x_0)| < e$ für alle $x, x_0 \in X$ mit $|x - x_0| < d$.

Def. Lipschitz Stetigkeit :

Eine Funktion $f : X \subseteq R \to R$ ist genau dann lipschitz-stetig auf X , wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt , so dass für alle $x, y \in X$ gilt :

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad .$$

Satz :

Sind die Funktionen f, g in x_0 stetig , so auch $f \pm g$, $f \cdot g$, $\forall a \in \mathrm{R} : a \cdot f$.

Falls $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\dfrac{f}{g}$ in x_0 stetig .

Ebenso ist die Zusammensetzung $f(g(x))$ von stetigen Funktionen wieder stetig .

Def. stetige Funktion :

Eine reellwertige Funktion heißt in M stetig , falls sie in allen Punkten von M stetig ist .

Zwischenwertsatz von Bolzano :

Eine auf dem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion nimmt dort jeden beliebigen Wert y an , der zwischen $f(a) \leq y \leq f(b)$ liegt .

Def. offene Menge :

Eine Menge $M \subseteq \mathrm{R}$ heißt offen , wenn zu jedem $x \in M$ ein $e > 0$ existiert , so dass $U_e \subset M$ gilt .

Beispiele :

$M = \mathrm{R}$ ist offen — $\varnothing$ ist offen

(a,b) ist offen — $(a,b]$ ist nicht offen

Def. abgeschlossene Menge :

Eine Menge $M \subseteq \mathrm{R}$ heißt abgeschlossen , wenn jede konvergente Folge von Zahlen aus M einen Grenzwert hat , der in M liegt .

Beispiele :

$\mathrm{R}, \varnothing$ sind abgeschlossen — $[a,b]$ ist abgeschlossen

$(a,b]$ ist nicht abgeschlossen

Satz :

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen , wenn $\mathbb{R} \setminus M$ offen ist .

Def. kompakte Menge :

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt kompakt , wenn jede beliebige Folge aus M eine konvergente Teilfolge enthält , deren Grenzwert in M liegt .

Satz :

Eine Menge ist genau dann kompakt , wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist .

Beispiel :

$\mathbb{R}$ ist nicht kompakt $\qquad$ $[a,b]$ ist kompakt

Def. innerer Punkt :

$x \in M$ heißt innerer Punkt der Menge M , wenn es eine e -Umgebung von ihm gibt, welche vollständig in M liegt .

Schlussfolgerung :

Eine Menge ist offen genau dann , wenn jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt ist .

Def. Randpunkt :

$x \in M$ heißt Randpunkt von M , wenn es in jeder e -Umgebung von ihm mindestens einen Punkt $Q \in M$ und mindestens einen Punkt $R \notin M$ gibt .

Beispiel :

$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ = Kreisscheibe

Häufungspunkte sind alle $|z| \le 1$.

Sei $M = (\{|z| < 1\} \setminus \{a\}) \cup \{b\}$, dann sind a und b Randpunkte .

Satz :

Eine auf einem kompakten Definitionsbereich definierte und stetige Funktion hat dort einen kleinsten und einen größten Funktionswert .

Def. Überdeckung :

Gibt es zu jedem $x \in M \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge G_x , so dass gilt $x \in G_x$, dann sagt man , die Menge aller $G = \bigcup G_x$ bildet eine Überdeckung der Menge M .

Enthält diese Überdeckung G eine endliche Teilmenge , die ebenfalls schon M überdeckt , so sagt man , G enthält eine endliche Überdeckung .

Heine-Borelscher Überdeckungssatz :

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt , wenn jede Überdeckung dieser Menge durch offene Mengen eine endliche Überdeckung enthält .

Beispiel :

$$M = \{1/n \quad , n \in \mathrm{N}\} \qquad G_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right) \quad , n = 2,3,\ldots$$

$$G_2 = (1/3\,,1) \quad , \qquad G_3 = (1/4\,,1/2)$$

Die G_n sind offene Mengen und überdecken M .
Allerdings enthält diese Überdeckung keine endliche Überdeckung.

Desweiteren : $0 \in M$, aber $1/n \to 0 \;\Rightarrow\; M$ ist nicht kompakt .

Satz :

Eine Funktion sei auf ihrem Definitionsbereich streng monoton und stetig , dann existiert auf ihrem Wertebereich die Umkehrfunktion , welche stetig und im selben Sinne monoton ist .

7.2 Potenzreihen

Def. Potenzreihe :

Eine unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad a_n, z, z_0 \in \mathrm{C}$

heißt Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt z_0. Die a_n heißen Koeffizienten der Potenzreihe .

Konvergenzsatz für Potenzreihen :

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ist $r := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Ist r positiv , so ist die Reihe

absolut konvergent ,wenn $|z - z_0| < r$.

divergent ,wenn $|z - z_0| < r$.

Im Fall $r = 0$ konvergiert sie nur für $z = z_0$.

TODO pic Heuser 1 S.363 scan

Satz :

Sind fast alle Koeffizienten einer Potenzreihe von Null verschieden , so ist ihr Konvergenzradius gleich

$r = \lim \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, falls dieser Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert .

Beispiel :

1.) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} \quad , z_0 = 0 \quad , a_n = \dfrac{1}{n!}$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim (n+1) = \infty = r \qquad \Rightarrow \text{absolut konvergent für alle } z$$

2.) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, $a_n = 1 \Rightarrow r = 1$

$\Rightarrow$ Konvergenz im Inneren der Kreisscheibe (für $|z| < r = 1$).

Divergenz für $|z| > 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$ = geometrische Reihe

Satz :

Die durch eine Potenzreihe definierte Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ist im Innern der Konvergenzscheibe , d.h. $\forall z : |z - z_0| < r$, stetig.

Identitätssatz für Potenzreihen :

Gegeben seien zwei Potenzreihen mit gleichem Entwicklungspunkt ,

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, mit positiven Konvergenzradien .

Gilt dann $f(z_j) = g(z_j)$ in einer Punktfolge (z_j) mit $\lim_{j \to \infty} z_j = z_0$, dann gilt $\forall z : f(z) = g(z)$.

Beispiel-Reihen :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

(siehe später Fourier-Reihen)

Folgerung : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

8. Differentialrechnung für reelle Funktionen

8.1 Begriff der Ableitung

Def. Differentialquotient :

$f(x)$ sei in $U_e(x_0)$ definiert und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ Differentialquotient von f an der Stelle x_0 .

Existiert der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, so ist f in x_0 differenzierbar .

TODO : bsp fuer sinx und x^n

Satz :

$f(x)$ sei in x_0 differenzierbar , dann ist $f(x)$ in x_0 stetig .

!! Die Umkehrung gilt nicht. !!

Def. lokales Extremum :

$f(x_0)$ hat an der Stelle $x_0 \in D(f)$ ein lokales Extremum , wenn eine e -Umgebung von x_0 existiert , so dass gilt : $\forall x \in U_e(x_0) \cap D(f) : f(x) \le f(x_0)$ oder aber

$\forall x \in U_e(x_0) \cap D(f) : f(x) \ge f(x_0)$.

Im ersten Fall spricht man von lokalem Maximum , im zweiten Fall von lokalem Minimum .

Satz (notwendige Bedingung für lokale Extrema):

Die Funktion $f(x)$ besitze in dem inneren Punkt x_0 ein lokales Extremum und sei dort differenzierbar , dann gilt : $f'(x_0) = 0$.

Satz (hinreichende Bedingung für lokale Extrema):

Sei f auf $[a,b]$ definiert und in (a,b) n-mal stetig differenzierbar und sei für $x \in (a,b)$

$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$, $f^{(n)}(x) \neq 0$.

Wenn n ungerade ist, so hat f in x kein lokales Extremum .

Wenn n gerade ist, so hat f in x ein lokales Extremum im engeren Sinn , und zwar :

- ein lokales Minimum , wenn $f^{(n)}(x) > 0$
- ein lokales Maximum , wenn $f^{(n)}(x) < 0$.

Beispiel für einseitige Ableitung :

$f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

$\Rightarrow f_+'(0) = 1$ und $f_-'(0) = -1$

8.2 Differentiationsregeln

Satz :

Die Funktionen $f(x), g(x)$ seien in x_0 differenzierbar , dann gilt :

1.) $y = c \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'$ (Faktorregel)

2.) $y = u \pm v \quad \Rightarrow \quad y' = u' \pm v'$ (Summenregel)

3.) $y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'$ (Produktregel)

4.) $y = \dfrac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (Quotientenregel)

5.) $y = f(g(x))$ bzw. $y = f(u)$ mit $u = g(x)$ (Kettenregel)

$\Rightarrow \quad y' = f'(u) \cdot g'(x)$

Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) :

$f(x)$ sei streng monoton in einer e -Umgebung von x_0 und $f'(x_0)$ existiere , dann existiert $f^{-1}(x)$ in einer Umgebung von $f(x_0)$ und es gilt : $f'(x) \cdot f^{-1\prime}(x) = 1$.

Beispiel :

$f(x) = y = e^x$ - streng monoton

Umkehrfunktion : $\ln y = x$ $\qquad \dfrac{d \ln y}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$

Standard-Ableitungen :

1.) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

2.) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

3.) $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4.) $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$ $\qquad a > 0$

5.) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

6.) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

8.3 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Def. :

Eine reelle Funktion heißt in einem **Intervall differenzierbar** , wenn diese Funktion in den inneren Punkten differenzierbar ist und in den möglicherweise vorhandenen Randpunkten einseitig differenzierbar ist .

Mittelwertsatz der Differentialrechnung :

$f(x)$ sei in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar , dann gibt es ein $x \in (a,b)$, so dass gilt :

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

geometrische Deutung :

Es existiert eine Tangente mit dem gleichen Anstieg wie die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

$\Rightarrow$

Satz von Rolle (Spezialfall des MWS) :

Ist $f(x)$ in $[a,b]$ stetig , in (a,b) differenzierbar und gilt $f(b) = f(a)$, dann existiert mindestens ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung :

$f(x)$ sei in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar und sei $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$, dann gibt es ein $x \in (a,b)$, so dass gilt :

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Regel von l'Hospital :

Die Funktionen f und g seien differenzierbar , $\forall x : g'(x) \neq 0$ und es sei

1.) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ oder

2.) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$,

dann gilt : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls dieser Grenzwert existiert .

Beispiel :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

8.4 Höhere Ableitungen

Def. stetig differenzierbar :

Besitzt f in einem Intervall n Ableitungen , und ist die n-te Ableitung in diesem Intervall stetig , so sagt man , f ist in diesem Intervall stetig differenzierbar .

8.5 Taylorpolynome und Taylorreihen

Satz von Taylor :

Die Funktion $f(x)$ sei in einem Intervall I $n+1$ mal stetig differenzierbar $\left(f \in C^{n+1}(I)\right)$, dann gilt :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + J(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad ,0 \leq J \leq 1$$

, wobei der zweite Summand Restglied von Lagrange heißt . (Summe siehe Potenzreihen)

- Für $n = 0$ folgt der MWS :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x) \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

- Die Wahl des Entwicklungspunktes entscheidet, ob die Funktion vereinfacht wird, oder nicht .

Satz (Taylorsche Konvergenzbedingung) :

Die Taylor-Reihe konvergiert genau dann , wenn das Lagrange-Restglied für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert .
Dies ist immer dann der Fall, wenn es Konstanten a und C gibt , so dass

$\forall x \in I$ und $\forall n \in \mathrm{N}$ stets $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq a \cdot C^n$ bleibt .

Beispiele für die Taylorsche Entwicklung : ($x_0 = 0$)

1.) $f(x) = e^x$ - beliebig oft differenzierbar mit $f^{(k)}(0) = 1$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{Jx}$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{Jx} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \to 0 \ \text{ für } \ n \to \infty \qquad \text{, also : } \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.) $f(x) = \sin x$ - beliebig oft differenzierbar

Ableitungen sind: $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ und $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, also

$f^{(2k)}(0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

$$\Rightarrow \sin x = +x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(Jx)$$

es folgt: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

9. Integralrechnung für reelle Funktionen

Integrationsregeln :

1.) $\int (af(x) \pm bg(x))dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$

2.) $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$

3.) $\int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx = (F \circ g)(x) + C$

4.) Substitutionsregel

f sei stetig auf $[a,b]$, g stetig differenzierbar auf $[a,b]$, $g([a,b]) \subset [a,b]$ und $g(a) = a$, $g(b) = b$, dann gilt :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)dt$$

Spezialfälle :

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)|$$

Grundintegrale :

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$ (ohne 0)

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$ auf R

$\int \cos x dx = \sin x$

$\int \sin x dx = -\cos x$ beide auf R

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$ auf $(-1,1)$

Satz (Integration rationaler Funktionen) :

Seien $P(x), Q(x)$ teilerfremde Polynome .

Die rationale Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lässt sich stets in der Form

$f(x) = G(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ darstellen , wobei $G(x)$ ein Polynom ist , und $P_n(x), Q_m(x)$ Polynome n-ten bzw. m-ten Grades mit $0 \le n \le m$ D.h. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ist „echt gebrochen" .

Satz (über die Partialbruchzerlegung) :

Jede echt gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, $(n > m)$
mit teilerfremdem Zähler- und Nennerpolynom ist eindeutig in eine Summe von Partialbrüchen der Form

$\frac{A}{(x-a)^k}$ und $\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}$, $a, p, q, A, C, D \in \mathbb{R}$ zerlegbar .

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet :

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\ldots} \\
&= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \\
&\quad \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots \\
&\quad + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{m_1}x+D_{m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \\
&\quad + \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{E_{m_2}x+F_{m_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}} + \ldots
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Konstanten multipliziert man den obigen Ausdruck mit $Q(x)$ und vergleicht den sich dabei ergebenden Zähler $Z(x)$ mit $P(x)$. Dabei ist $Z(x) \equiv P(x)$. Man ordnet $Z(x)$ nach Potenzen von x und setzt die Koeffizienten gleicher Potenzen von $Z(x)$ und $P(x)$ gleich . **(Koeffizientenvergleich)**

1. Beispiel :

$$\frac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x^2-1)}$$

Gleichsetzen der Koeffizienten vor gleichen Potenzen von x im Zähler der linken und der rechten Seite der Gleichung führt auf das Gleichungssystem

$6 = A + B + C$, $-1 = B - C$, $1 = -A$, dessen Lösung die Werte $A = -1$, $B = 3$, $C = 4$ ergibt .

2. Beispiel :

$$\frac{x+1}{x(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} = \frac{A_1(x-1)^3 + B_1x(x-1)^2 + B_2x(x-1) + B_3x}{x(x-1)^3}$$

Und die Koeffizienten wieder mittels Koeffizientenvergleich bestimmen .

Def. Riemannsche Summe :

$$S(f, Z_j, x_j) := \sum_{k=1}^{n_j} f(x_k^{(j)}) \cdot \left| I_k^{(j)} \right| \qquad , \qquad x_k^{(j)} \in I_k^{(j)} := \left[x_{k-1}^{(j)} \, , x_k^{(j)} \right]$$

Def. Riemann-integrierbar :

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, wenn jede ihrer Riemann-Folgen $\left(S(Z_j, x_j) \right)$ gegen ein und denselben Grenzwert konvergiert . $\qquad |Z| = \max_{k=1}^{n} |I_k|$ = Feinheitsmaß

Diesen Grenzwert $\int_a^b f(x)dx$ nennt man Riemann-Integral von f auf $[a,b]$.

Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung :

Besitzt die Funktion F auf dem Intervall $[a,b]$ eine stetige oder auch nur R-integrierbare Ableitung , so ist

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \quad .$$

D.h. man kann den Endwert $F(b)$ der Funktion aus ihrem Anfangswert $F(a)$ und ihrer Änderungsrate F' rekonstruieren .

Cauchysches Integrabilitätskriterium :

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, wenn es zu jedem $e > 0$ ein $d > 0$ gibt , so dass bei jeder Wahl der Zwischenvektoren x_1 und x_2 stets

$\left| S(f, Z_1, x_1) - S(f, Z_2, x_2) \right| < e$ gilt , wenn nur $|Z_1|, |Z_2| < d$ ist .

Satz :

Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist dort auch R-integrierbar . D.h. $\mathrm{C}[\mathrm{a,b}] \subset \mathrm{R}[\mathrm{a,b}]$

Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung :

Jedes $f \in \mathrm{C}[\mathrm{a,b}]$ besitzt eine Stammfunktion auf $[a,b]$, z.B. die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \qquad , \; (a \le x \le b) .$$

Def. Darbouxsche Integrale :

$Z := \{x_0,...,x_n\}$ ist Zerlegung von $[a,b]$ mit $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $m_k := \inf f(I_k)$, $M_k := \sup f(I_k)$

$U(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} m_k |I_k|$ und $O(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} M_k |I_k|$ sind Untersumme bzw. Obersumme . Dann ist

$\int_{\underline{a}}^{b} f(dx) := \sup_Z U(f,Z)$ das untere D-Integral und

$\int_{a}^{\bar{b}} f(dx) := \inf_Z O(f,Z)$ das obere D-Integral .

Satz (Darbouxsches / Riemannsches Integrabilitätskriterium) :

Die Funktion $f \in B[a,b]$, d.h. reellwertig und beschränkt , ist genau dann D/R - integrierbar auf $[a,b]$, wenn es zu jedem $e > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $O(f,Z) - U(f,Z) < e$.

Def. Nullmenge :

Die Menge $M \subset R$ heißt Nullmenge oder Menge vom Maß 0 , wenn es zu jedem $e > 0$ höchstens abzählbar viele abgeschlossene (oder auch offene) Intervalle I_j gibt , die M überdecken und deren „Längensumme“ $\sum |I_k| \le e$ ist .

Satz :

1.) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge .
2.) Endliche und abzählbare Teilmengen von R sind Nullmengen .
3.) Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge .

Def. fast überall (f.ü.) :

Man sagt , die Funktion f sei fast überall auf X stetig oder differenzierbar , wenn die Punkte von X , in denen sie unstetig bzw. nicht differenzierbar ist , jeweils nur eine Nullmenge bilden .

Satz (Lebesguesches Integrabilitätskriterium) :

Die Funktion f ist genau dann auf $[a,b]$ R-integrierbar , wenn sie dort beschränkt und fast überall stetig ist.

Def. : $\langle a,b \rangle := [\min(a,b) , \max(a,b)]$

Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung :

Ist f auf $\langle a,b \rangle$ R-integrierbar , so gibt es eine wohlbestimmte Zahl m mit $\inf f \le m \le \sup f$, so dass

$\int_a^b f(x)dx = m(b-a)$. D.h. $m(f)$ ist der Mittelwert von f .

Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung :

Die Funktionen f, g seien auf $\langle a,b \rangle$ R-integrierbar , und es sei $g \ge 0$ oder $g \le 0$.
Dann gibt es ein m mit $\inf f \le m \le \sup f$, so dass

$\int_a^b fg dx = m \int_a^b g dx$.

Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung :

f sei monoton und g sei stetig auf $\langle a,b \rangle$. Dann gibt es in $\langle a,b \rangle$ einen Punkt x mit

$$\int_a^b fgdx = f(a)\int_a^x gdx + f(b)\int_x^b gdx \quad .$$

Def. uneigentliches Integral :

$\int_a^b f(x)dx$ existiere als R-Integral für beliebige $b > a$.

Dann heißt $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ im Falle der Konvergenz uneigentliches R-Integral über $[a,\infty)$.

Beispiel :

1.) $\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{-1}\right) = e^{-1}$

2.) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sin x}$ existiert nicht

3.) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ exisiert

Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium) :

Das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ konvergiert genau dann , wenn zu jedem $e > 0$ ein $d(e) > a$ existiert , so dass gilt : $\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < e$ mit $x_2 > x_1 > d(e)$.

Beispiel 1 :

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{x^2}dx\right| = \left|\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right| = \left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right| < e \qquad \Rightarrow \text{Konvergenz , Existenz}$$

(D.h. es finden sich immer $x_2 > x_1 > d(e)$, so daß der Betrag $< e$ ist .)

Beispiel 2:

$\int_0^\infty \frac{\sin}{x}dx$, falls $x = 0 , \frac{\sin x}{x} = 1$

$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x}dx$ partielle Integration : $u' = \sin x$, $v = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow u = -\cos x$, $v' = -\frac{1}{x^2}$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x}dx = -\cos x\frac{1}{x}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos x}{x^2}dx = -\frac{\cos x_2}{x_2}+\frac{\cos x_1}{x_1}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin x}{x}dx\right| \underset{x_1,x_2>0}{\le} \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x}\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{2}{x_1} < e \quad , \text{ falls } x_1 > \frac{2}{e} \; .$$

D.h. nach dem Cauchy-Kriterium ist das obige Integral konvergent .

$$\left(\int_0^\infty \frac{\sin}{x}dx = \frac{p}{2}\right)$$

Satz (Majorantenkriterium) :

Ist $|f| \leq g$ auf $[a,+\infty)$ und konvergiert $\int_a^{+\infty} gdx$, so ist $\int_a^{+\infty} fdx$ (absolut) konvergent .

Satz (Minorantenkriterium) :

Ist $0 \leq h \leq f$ auf $[a,+\infty)$ und divergiert $\int_a^{+\infty} hdx$, so divergiert auch $\int_a^{+\infty} fdx$.

10. R^n , metrischer und normierter Raum

Def. Vektorraum :

- „+ „ ist kommutativ und assoziativ
- Existenz von Nullelement und den Inversen
- Skalare können in Summe von zwei Vektoren reinmultipliziert werden

- Konvergenz von Zahlenfolgen wie im R , bloss mit Norm statt Betrag .

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung : $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Def. Polygonzug :

= endlich viele Geradenstücke

$$P(x_0,...,x_n) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \overline{x_j \, x_{j+1}}$$

Def. zusammenhängende Punktmenge :

Eine Punktemenge $M \subseteq R$ heisst zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte aus M ein Polygonzug existiert , der diese Punkte verbindet und vollständig in M verläuft .

- Ein Gebiet des R^n ist eine offene und zusammenhängende Punktmenge .

Def. Norm :

$\|\cdot\| : V \to R$, Eigenschaften :

1.) $\|x\| > 0 \quad \forall x \neq 0$, $\|0\| = 0$

2.) $\|l x\| = |l| \cdot \|x\|$

3.) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

V heisst mit $\|\cdot\|$ normierter Raum .

Beispiele für normierte Räume :

1.) R^n mit 1,2, ∞ -Norm (Betragssummennorm,Euklid. Norm,Maximumnorm (maximale Komponente))

2.) $l_\infty :=$ Menge aller beschränkten Zahlenfolgen mit $\|x\| = \sup |x_j|$

Def. Metrik :

$d(\cdot,\cdot): V \times V \to R$, Eigenschaften :

1.) $d(x,y) > 0 \quad \forall (x \neq y)$, $d(x,x) = 0$

2.) $d(x,y) = d(y,x)$

3.) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

V heisst mit $d(\cdot,\cdot)$ metrischer Raum .

- **Jeder normierte Raum wird zum metrischen Raum mittels** $d(x,y) = \|x - y\|$ **.**

11. Reelle Funktionen des R^n in den R^m , Differentialrechnung im R^n

Def. Stetigkeit im R^n :

Eine Funktion $f : X \subseteq R^n \to R^m$ heisst stetig an der Stelle $x_0 \in X$, wenn für jede beliebige Folge (x_n) mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Beispiel :

1.) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,x = y = 0 \end{cases}$$

stetig für $(x,y) \neq (0,0)$, für $x = y = 0$ gilt :

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \neq f(0,0) = 0 \qquad \Rightarrow \text{unstetig in } (0,0)$$

2.) $$f(x,y) = \begin{cases} 0 \, , x \cdot y = 0 \\ 1 \quad , sonst \end{cases}$$

auf Achsen unstetig , sonst stetig

Differentialrechnung im R^n :

Def. :

$f : G \subset R^2 \to R^1$, Im Falle der Existenz heissen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) \quad \text{partielle Ableitung nach } x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) \quad \text{partielle Ableitung nach } y$$.

!! Aus der Existenz der partiellen Ableitungen folgt nicht die Stetigkeit. !! (Im Gegensatz zu R^1)
(siehe oben , Beispiel 1)

!! Existenz der partiellen Ableitungen heisst nicht, dass die Funktion differenzierbar sein muss. !!

Satz :

Ist f in einem Gebiet G des R^2 überall partiell differenzierbar , und sind die beiden partiellen Ableitungen stetig in G , so ist f stetig in G .

Satz von Schwarz (für partielle Ableitungen) :

Existieren sämtliche partiellen Ableitungen und sind diese stetig , dann sind die gemischten Ableitungen gleich . d.h. $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

Beispiel :

$f(x) = xy + y^2 x^3$, $f_x = y + 3y^2 x^2$, $f_y = x + 2yx^3$

$f_{xy} = 1 + 6yx^2 = f_{yx}$

Def. Gradient :

$$grad\;\; f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Def. Richtungsableitung :

l sei ein normierter Richtungsvektor . Der Grenzwert $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot l) - f(x_0)}{t}$ heisst im Falle der Existenz Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung l .

Satz :

Ist $f : R^n \to R$ in x_0 differenzierbar , so existiert die Richtungsableitung für beliebige Richtungen und es gilt : $\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \langle grad\;\; f(x_0)\, ,\, l \rangle$.

Lokale Extrema :

Notwendiges Kriterium für die Existenz lokaler Extrema :

Die Funktion f besitze in dem inneren Punkt x ein lokales Extremum und sei in x nach allen Variablen partiell differenzierbar. Dann ist notwendig $grad\;\; f(x) = 0$.

Def. Hesse-Matrix :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} \\ & & & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} & & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- **Für eine C^2 -Funktion ist die Hesse-Matrix nach dem Satz von Schwarz eine symmetrische Matrix .**

Hinreichendes Kriterium für die Existenz lokaler Extrema :

Für die Funktion $f \in C^2$ gelte in einem Punkt x $\quad grad\ f(x) = 0$, ist dann die Hesse-Matrix $H_f(x)$ positiv bzw. negativ definit (alle Hauptunterdeterminanten > 0) , so besitzt f an der Stelle x ein lokales Minimum bzw. Maximum im engeren Sinne .

Beispiel 1 :

$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad grad\ f(0,0) = 0$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2x+2y \\ 2x+2y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det H = 4$$

Die Hesse-Matrix ist also positiv definit , somit befindet sich an der Stelle $(0,0)$ ein lokales Minimum .

Beispiel 2 :

$f(x,y) = x^2 y^2 \qquad grad\ f(0,0) = 0$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det H = 0$$

Die Hesse-Matrix ist also werder positiv noch negativ definit , somit befindet sich an der Stelle $(0,0)$ kein Lokales Extremum .

Implizite Funktionen :

F sei in $U_e(x_0, y_0)$ stetig und es gelte $F(x_0, y_0) = 0$.
f sei in $U_e(x_0, y_0)$ streng monoton bezüglich y , und x sei fest .
Dann gibt es eine Umgebung von (x_0, y_0) , so dass gilt : $\quad y = f(x)$ und f stetig in dieser Umgebung .
(siehe Übungen zur Auflösbarkeit)

12. Jordankurven und Funktionen von beschränkter Schwankung

Def. Kurve :

Die Funktion $\Phi : [a,b] \rightarrow R^n$ sei stetig auf dem Intervall .
Dann heisst die Bildmenge $C = \{\Phi(t) : t \in [a,b]\}$ **Kurve** im R^n .

Beispiel :

1.) $\quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ $\qquad$ = Kreis

2.) $\quad \Phi(t) = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0)$ $\qquad$ - Verbindung im n-dimensionalen,incl.der Randpunkte $(t \in [0,1])$

3.) $\quad \Phi(t) = \text{const.}$ $\qquad$ - Kurve ist ein einziger Punkt

Def. Jordankurve :

C heisst **Jordankurve** , wenn Φ injektiv (eineindeutig) ist .

C heisst **geschlossene Jordankurve** , wenn Φ für $t \in (a,b)$ injektiv ist und $\Phi(a) = \Phi(b)$.

Ist $\Phi \in C^1(I)$, dann heisst die Kurve **glatt** .

C heisst **stückweise glatt** , wenn eine Zerlegung existiert , so dass $\Phi \in C^1([t_j , t_{j+1}])$, j=0,...,n-1

Def. Länge der Kurve :

Wenn eine Zerlegung Z des Intervalls existiert , und $L(C) = \sup l(Z) < \infty$, mit

$l(Z) = \sum_{i=0}^{n} \left\| x_i - x_{i+1} \right\|$, $Z = (a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b)$, $x_i = \Phi(t_i)$,

dann heisst die Kurve C , $(\Phi : [a,b] \to R^n)$, rektifizierbar / messbar mit der Länge $L(C)$.

Beispiele :

TODO

Satz :

Es sei durch $\Phi : [a,b] \to R^n$ eine glatte Kurve C definiert , dann ist C rektifizierbar und hat die Länge

$$L(C) = \int_a^b \left\| \Phi'(t) \right\| = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Phi_j '(t) \right)^2} dt \quad .$$

Beispiel :

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ $r > 0$, $0 \le t \le 2p$ = Kreis (geschlossene Jordankurve)

$$L(C) = \int_0^{2p} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2p} r dt = 2pr$$

Funktionen von beschränkter Variation / Schwankung :

Def. Variation (An- und Abstiege des Funktionswertes im gegebenen Intervall):

$f : [a,b] \to R^1$ und Z sei eine Zerlegung des Intervalls .

- $Var(Z) = Var(f, Z) = \sum_{i=0}^{n} \left| f_i - f_{i+1} \right|$ heisst **Variation** von f bezüglich Z und $[a,b]$.
- $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_Z Var(Z, f)$ ist die **Totalvariation** .
- Falls $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$, dann heisst f von beschränkter Variation / Schwankung .

$$BV(I) = \left\{ f : f : I \to R^1 \quad , \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \right\}$$

Satz :

$f : I = [a,b] \to R^1$, dann gilt :

1.) Ist f monoton auf I , so ist $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$.

2.) $f \in C^1(I)$, dann gilt : $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$

3.) Folglich sind monotone und auch stetig differenzierbare Funktionen aus $BV(I)$.

Satz :

Es sei $j : I = [a,b] \to R^n$. Dann ist die durch j definierte Kurve genau dann rektifizierbar , wenn $j_i : I \to R^1$ $, i = 1,...,n$ sämtlich aus $BV(I)$ sind .

Beispiel :

$f(x) = \begin{cases} x \sin x & ,0 < x \le 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ (oszillierend) ist nicht von beschränkter Variation

$\Rightarrow$ nicht rektifizierbar

Darstellungssatz von Jordan :

$f : I = [a,b] \to R^1$, f ist genau dann aus $BV(I)$, wenn gilt : $f = g - h$, wobei g und h monotone Funktionen sind .

13. Das Riemann-Stieltjes-Integral / Kurvenintegrale

Def. RS-Integral :

Es sei $f, g : I = [a,b] \to R^1$. Ist $Z := \{x_0,...,x_n\}$ eine Zerlegung von I und $x := \{x_1,...,x_n\}$ ein zugehöriger Zwischenvektor , so heisst

$$S_g(f, Z, x) := \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$ eine **RS-Summe** .

Eine Folge solcher Summen $S_g(f, Z_j, x_j)$ wird **RS-Folge** genannt , wenn (Z_j) eine Zerlegungsnullfolge ist .

Strebt jede RS-Folge gegen ein- und denselben Grenzwert , so ist f auf I bezüglich g **RS-integrierbar** , und dieser Grenzwert heisst **RS-Integral** $\int_a^b f(x) dg(x)$.

Satz :

$f, g : I = [a,b] \to R^1$, f und g seien beschränkt .

Dann existiert das RS-Integral von f nach g , falls

1.) $f \in C(I)$ und $g \in BV(I)$ oder falls

2.) f R-integrierbar ist und g lipschitz-stetig .

Rechenregeln für RS-Integrale :

1.) $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$

2.) $\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dg = \int_a^b f_1(x)dg + \int_a^b f_2(x)dg$

3.) $\int_a^b f_1 d(f_2 + g) = \int_a^b f_1 df_2 + \int_a^b f_1 dg$

4.) $\int_a^b l_1 f_1 d\, l_2 g = l_1 l_2 \int_a^b f_1 dg$

5.) $\int_a^b fdg = \int_a^b gdf$

Satz :

Die Funktion f sei auf $I = [a,b]$ R-integrierbar und $g \in C^1(I)$, dann gilt :

$$\underline{\int_a^b fdg = \int_a^b f(x)g'(x)dx} \quad .$$

1. MWS analog zu R-Integralen : $\int_a^b fdg = m\left(g(b) - g(a)\right)$

Def. Kurvenintegral 1. Art :

Es sei $I = [a,b]$ und durch $\Phi : I \to R^n$ eine rektifizierbare Kurve C gegeben . $\Phi \in C(I)$.

Auf C sei eine reelle Funktion f definiert .

Im Falle der Existenz nennt man das RS-Integral $\int_a^b f\left(\Phi(t)\right)ds(t)$ von f nach der Weglängenfunktion $s(t)$ das **Kurvenintegral 1. Art** von f über der Kurve C .

Für das obige Kurvenintegral 1. Ordnung gelten sämtliche Eigenschaften des RS-Integrals :

$\frac{ds}{dt} = \left\|\Phi'(t)\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\Phi_j'(t)\right)^2}$, d.h. es gilt :

$$\underline{\int_a^b f\left(\Phi(t)\right)ds(t) = \int_a^b \left(f\left(\Phi(t)\right) \cdot \left\|\Phi'(t)\right\|\right)dt} \quad .$$

Das Kurvenintegral 1.Art ist vom Weg unabhängig !

Def. Kurvenintegral 2. Art :

Es sei $I = [a,b]$ und durch $\Phi : I \to R^n$ eine rektifizierbare Kurve C gegeben . $\Phi \in C^0(I)$.

Auf C sei eine Funktion f definiert .

Im Falle der Existenz nennt man das RS-Integral $\int_a^b f\left(\Phi(t)\right)d\Phi_k$ das **Kurvenintegral 2. Art** von f über der Kurve C . $\left(\Phi \in R^n \ , \Phi_k \in R\right)$

Beispiel :

Zu berechnen sind die Integrale $J_k := \int\limits_{g_k} y dx + (x-y)dy$, k=1,2,3 über die folgenden Wege g_k :

a) g_1: polygonaler Weg durch die Punkte (0,0) , (1,0) , (1,1)

D.h. g_1 entsteht durch Aneinanderhängung der Wege

$x = t$, $y = 0$ und $x = 1$, $y = t$ mit jeweils $0 \le t \le 1$

b) g_2: polygonaler Weg durch die Punkte (0,0) , (0,1) , (1,1)

D.h. g_2 entsteht durch Aneinanderhängung der Wege

$x = 0$, $y = t$ und $x = t$, $y = 1$ mit jeweils $0 \le t \le 1$

c) g_3: Stück der Parabel $y = x^2$ von (0,0) zu (1,1)

$x = t$, $y = t^2$ mit $0 \le t \le 1$

Es ist :

$$J_1 = \int_0^1 [0 \cdot 1 + (t-0) \cdot 0]dt + \int_0^1 [t \cdot 0 + (1-t) \cdot 1]dt = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}$$

$$J_2 = \int_0^1 [t \cdot 0 + (0-t) \cdot 1]dt + \int_0^1 [1 \cdot 1 + (t-1) \cdot 0]dt = \int_0^1 (-t+1)dt = \frac{1}{2}$$

$$J_3 = \int_0^1 [t^2 \cdot 1 + (t-t^2) \cdot 2t]dt = \int_0^1 (3t^2 - 2t^3)dt = \frac{1}{2}$$

Für $J_k := \int\limits_{g_k} y dx + (y-x)dy$ jedoch stimmen die Integrale nicht mehr überein .

Satz :

Sei $\bar{f} : G \to R^n$, $\bar{f} \in C^1(G)$, d.h. alle Komponenten von $\bar{f}$ sind stetig in G .

Dann ist $\int \bar{f} d\bar{x} = \int f_1 dx_1 + ... + \int f_n dx_n$ in G genau dann vom Weg unabhängig , wenn in G gilt :

$\bar{f} = grad\ V = (Vx_1, ..., Vx_n)$.

Def. einfach zusammenhängendes Gebiet :

Das Gebiet $G \subseteq R^n$ heisst einfach zusammenhängend , wenn keine Randpunkte existieren .

Beispiele :

R^n und $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ sind einfach zusammenhängende Gebiete .

Satz (Wegunabhängigkeit bei Kurvenintegralen 2.Ordnung) :

Sei $\bar{f} : G \to R^n$, $\bar{f} \in C^1(G)$, d.h. alle Komponenten von $\bar{f}$ sind stetig in G .

Erfüllt $\bar{f}$ die Integrabilitätsbedingung in G : $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_i}$, i,j=1,...,n ,

und ist G beschränkt und einfach zusammenhängend , dann existiert eine Funktion V mit der Eigenschaft : $grad\ V = \bar{f}$ in G und somit ist $\int \bar{f} d\bar{x}$ wegunabhängig .

Bemerkungen :

- Vektorfelder $\bar{f}$ mit der Eigenschaft $\bar{f} = grad\ V$ heissen Potentialfelder .
- Ist das Kurvenintegral vom Weg unabhängig , dann ist das Integral über eine geschlossene Kurve Null.

Beispiel :

Im obigen Beispiel war

a) $J_k := \int_{g_k} ydx + (x-y)dy$ wegunabhängig und b) $J_k := \int_{g_k} ydx + (y-x)dy$ nicht.

a) $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1$ $\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, d.h. wegunabhängig

b) $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1$ $\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, d.h. nicht wegunabhängig

14. Der Jordan-Riemannsche Inhalt / Das Riemann-Integral im R^n

Def. Hyperquader : $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Def. : Zwei Intervalle heissen **nicht überlappend** , wenn diese keine gemeinsamen inneren Punkte haben .

Def. : **Intervallsumme** = Vereinigung endlich vieler Intervalle $S = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$

Def. äusserer und innerer Jordan-Riemann-Inhalt :

$M \subset R^n$ sei beschränkt . Dann heisst

$|M|_a = \sup_{S \subseteq M} |S|$ äusserer Jordan-Riemann-Inhalt und

$|M|_i = \inf_{S \subseteq M} |S|$ innerer Jordan-Riemann-Inhalt .

Zu jeder beschränkten Menge existieren $|M|_i$ und $|M|_a$ und es gilt $0 \leq |M|_i \leq |M|_a < \infty$.

Def. messbar :

Die beschränkte Punktmenge $M \subset R^n$ heisst messbar / quadrierbar im J-R Sinne genau dann , wenn $|M|_i = |M|_a$.

Insbesondere ist jedes offene , halboffene und abgeschlossene Intervall quadrierbar .

Def. :

- $M^\circ = \text{int } M = \{x \in M \ : \ \text{x ist innerer Punkt}\}$ heisst **Inneres** von M .
- $\overline{M} = M \cup \{\text{Häufungspunkte von } M\}$ heisst **abgeschlossene Hülle** von M .
- $\partial M = \{\text{Randpunkte von } M\}$ heisst **Rand** von M .

Beispiel :

$$M = \{x \in R^n : \|x\| < 1\}$$

$$M^\circ = M \quad , \quad \partial M = \{x \in R^n : \|x\| = 1\} \quad , \quad \overline{M} = \{x \in R^n : \|x\| \le 1\}$$

Satz :

$M, N \subset R^n$ seien beschränkt , dann gilt :

1.) $|M|_i + |\partial M|_a = |M|_a$

2.) $|M \cup N|_a \le |M|_a + |M|_b$

3.) $\operatorname{int} M \cap \operatorname{int} N = \emptyset$, dann folgt $|M \cup N|_i \ge |M|_i + |N|_i$

4.) Sind M, N quadrierbar , so auch $M \cup N$, $M \setminus N$, $M \cap N$

5.) $M \subset N \Rightarrow |M| \le |N|$

6.) $M \subset N$, $|N \setminus M| = |N| - |M|$

Folgerung :

Eine Menge $M \subset R^n$ ist genau dann messbar im J-R-Sinne , wenn $|\partial M|_a = 0$.

Satz :

$G \subset R^n$ sei beschränkt , $f : G \to R^n$ sei auf G gleichmässig stetig , dann gilt :

$$|graph\ f| = |\{(x, f(x)) \in R^{n+1} , x \in G\}| = 0$$

Folgerung :

$M \subset R^n$ sei beschränkt . Dann kann ∂M durch endlich viele Graphen beschrieben werden , und somit ist M quadrierbar .

Satz :

Das Jordan-Riemann-Maß ist invariant gegenüber Translationen , Drehungen und Spiegelungen .

Riemann-Integral im R^n :

Def. :

G sei beschränkt und quadrierbar , $f : G \to R^n$ und I sei eine G überlappende Intervallsumme .

$$S(I) = \sum_{j=1}^{N} \sup_{x \in I_j \cap G} f(x) \cdot |I_j \cap G| \qquad s(I) = \sum_{j=1}^{N} \inf_{x \in I_j \cap G} f(x) \cdot |I_j \cap G| \qquad , \left(I = \bigcup_{j=1}^{N} I_j \right)$$

heissen **Obersummen** bzw. **Untersummen** von f bezüglich G bei der Zerlegung I .

$\inf_I S(I) = \underline{\int_G} fdx$ heisst **oberes R-Integral** , $\sup_I s(I) = \overline{\int_G} fdx$ heisst **unteres R-Integral**.

Ist $\underline{\int_G} fdx = \overline{\int_G} fdx = \int_G fdx$, dann heisst f über G **R-integrierbar** .

Satz :

Die beschränkte Funktion f ist genau dann über dem beschränkten und quadrierbaren Gebiet $G \subset R^n$ integrierbar , wenn zu jedem $e > 0$ eine Intervallsumme I existiert , so dass $S(I) - s(I) < e$.

Satz (MWS) :

$G \subset R^n$ sei beschränkt und quadrierbar , $f : G \to R^1$ und $\forall x \in G \;\; m \le f(x) \le M$. Dann gilt :

$$m|G| \le \int_G f dx \le M|G| \quad .$$

Def. Ordinatenmenge :

$G \subset R^n$ sei beschränkt und quadrierbar und $f : G \to R^1$, dann heisst

$M(f) = \{(x,t)\,,\, x \in G \,,\, 0 \le t \le f(x)\}$ **Ordinatenmenge** von f .

Satz :

$G \subset R^n$ sei beschränkt und quadrierbar , $f : G \to R^1$, dann gilt :

$|M(f)| = \int_G f dx$, falls f integrierbar ist .

Satz von Fubini :

I sei ein Intervall im R^n , I_{x_1} sei ein Intervall im R^p , I_{x_2} sei ein Intervall im R^q und $p + q = n$, d.h. $I = I_{x_1} \times I_{x_2}$. f sei auf I beschränkt und integrierbar.

Dann gilt mit $f : I_{x_1} \times I_{x_2} \to R$:

$$\int_I f dx = \int_{Ix_1} \left(\int_{Ix_2} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{Ix_2} \left(\int_{Ix_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \quad .$$

D.h. die Integrationsreihenfolge ist egal .

Folgerung (Prinzip von Cavalieri) :

Zwei Körper im R^3 , die in gleichen Höhen gleiche Schnittflächen haben , besitzen gleiches Volumen .

Variablentransformation :

Im R^1 :

$$\int_{a'}^{b'} f(j)dj = \int_a^b f(j(x)) j'(x) dx \qquad \text{, da } \frac{dj}{dx} = j'$$

Satz :

$H \subset R^n$ sei offen , beschränkt und messbar , $\Phi : H \to G \subset R^n$, $\Phi \in C^1(H)$, Φ injektiv und lipschitz-stetig. Und $f : G \to R^1$. Dann gilt :

$$\int_G f(x) dx = \int_H f(\Phi(y)) |\det \Phi'| dy$$

15. Integralsätze

Def. Normalbereich :

Unter einem Normalbereich im R^2 bezüglich der x-Achse versteht man eine Menge $G \subset R^2$ der Form

$$G = \{(x,y) \in R^2 : \quad a \le x \le b \quad , \quad j_1(x) \le y \le j_2(x)\}$$

Gaußscher Integralsatz der Ebene :

G sei ein Normalbereich bezüglich x und y . $g : G \to R^1$ sei stetig differenzierbar in $\overline{G}$.

Dann gilt bei stückweise glatter , positiv orientierter Randkurve C von G :

$$\int_G (g_x - g_y) dxdy = \int_C g dx + \int_C g dy \quad .$$

Def. Divergenz :

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : G \subset R^2 \to R^2 \quad , \; f \in C^1(G) . \text{ Dann heisst}$$

$div\ f = f_{1x} + f_{2y}$ **Divergenz** des Vektorfeldes f .

$\Rightarrow$ Gaußscher Satz der Ebene :

$$\int_G div\ f\ dxdy = \int_C f \cdot n\ ds \quad , \; f \cdot n = f_1 n_1 + f_2 n_2 \quad , \quad n = \text{Außennormale}$$

Falls kein Normalbereich vorliegt , erfolgt eine Zurückführung durch Zerschneiden .

Oberflächenintegrale und Gaußscher Satz im R^3 :

Def. Kreuzprodukt :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Def. Fläche :

$G \subset R^2$ sei offen und messbar . $\Phi : \overline{G} \to R^3$ sei injektiv , stetig differenzierbar in G , lipschitz-stetig und $\mathrm{Rang}\,(\Phi') = 2$. (Φ' = Funktionalmatrix)

Dann heisst $F = \Phi(G)$ eine (offene) **Fläche** in G .

Beispiel :

$G = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ = obere Hälfte der Einheitskugel

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

Darstellungen der Art $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix}$ heissen **explizite Darstellungen** .

Def. Tangentialvektoren :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \Phi_{1x} \\ \Phi_{2x} \\ \Phi_{3x} \end{pmatrix} \quad = \text{Tangentialvektor an der Fläche } \Phi \text{ im } R^3 \quad (y = \text{const})$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \Phi_{1y} \\ \Phi_{2y} \\ \Phi_{3y} \end{pmatrix} \quad = \text{Tangentialvektor an der Fläche } \Phi \text{ im } R^3 \quad (x = \text{const}) \quad \text{- orthogonal zu } \vec{a}$$

Def. Tangentialebene : = Die durch die Tangentialvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene .

Aus der Orthogonalität der Tangentialvektoren folgt für die Außennormale :

Def. Außennormale : $\vec{n} = \dfrac{\Phi_x \times \Phi_y}{|\Phi_x \times \Phi_y|}$

Def. :

$G \subset R^2$ sei offen und messbar , $\Phi : G \to R^3$ habe obige Eigenschaften , $f : \Phi(G) \to R^1$

Dann heisst

$\int\limits_{\Phi(G)} f do = \int\limits_G f(\Phi(x,y)) \cdot |\Phi_x \times \Phi_y| dxdy$ **Oberflächenintegral 1. Art** von f über $\Phi(G)$.

$\int\limits_G |\Phi_x \times \Phi_y| dxdy$ heisst **Flächeninhalt** der Fläche $\Phi(G)$.

$$(do = |\Phi_x \times \Phi_y| dxdy)$$

Def. Gaußsche Fundamentalgrößen :

$$E = |\Phi_x|^2 \quad = \Phi_{1x}^2 + \Phi_{2x}^2 + \Phi_{3x}^2$$

$$G = |\Phi_y|^2 \quad = \Phi_{1y}^2 + \Phi_{2y}^2 + \Phi_{3y}^2$$

$$F = \Phi_x \Phi_y \quad = \Phi_{1x}\Phi_{1y} + \Phi_{2x}\Phi_{2y} + \Phi_{3x}\Phi_{3y}$$

$$\Rightarrow EG - F^2 \quad = |\Phi_x \times \Phi_y|^2$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_G |\Phi_x \times \Phi_y| dxdy = \int\limits_G \sqrt{EG - F^2}\, dxdy$$

Def. (Divergenz und Rotation im R^3) :

Nabla-Operator $\nabla := \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right)$

$$div\ f := \nabla \cdot f \quad = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial z} \right)$$

$$rot\ f := \nabla \times f \quad = \left(f_{3y} - f_{2z} \ ,\ f_{1z} - f_{3x} \ ,\ f_{2x} - f_{1y} \right)$$

Gaußscher Integralsatz im R^3 :

Der offene und beschränkte Bereich $V \subset R^3$ sei Normalbereich bezüglich aller Achsen .

$f : V \to R^3$ sei stetig in V und f_{1x}, f_{2y}, f_{3z} seien stetig in V und beschränkt . Dann gilt :

$$\int_{\partial V} \vec{f}\vec{n} dO = \iiint_V div\ \vec{f}\ dxdydz \quad . \qquad (\vec{n} \text{ ist äußere Normale})$$

Beispiel :

Oberfläche eines zylindrischen Körpers

$$\int_{\partial V} \vec{f}\vec{n} dO = \int_{F^+} fn_{top} dO + \int_{F^-} fn_{bottom} dO + \int_{F^M} fn_{side} dO$$

Stokesscher Integralsatz :

F sei eine Fläche im R^3 mit den obigen Voraussetzungen .

$G \subset R^3$, $f \in C^1(G)$, $\vec{n}$ sei der Normalenvektor , dann gilt :

$$\int_{\partial V} \vec{f} d\vec{s} = \int_F \vec{n} \cdot rot\ f\ dO = \int_{\Phi(g)} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

$$\left(= \int_0^L \vec{f}(\Phi(g)) d\Phi \qquad , L = |g| \right)$$

16. Fourierreihen

Def. orthogonale Funktionensysteme :

$\{f_n(x)\}$ sei eine Menge von auf $[a,b]$ integrierbaren Funktionen , so dass auch $f_n \cdot f_m$ integrierbar ist .

Gilt $\int_a^b \left(f_n(x) \cdot f_m(x) \right) dx = d_{mn} \cdot l_n$ mit $l_n > 0$ und $d_{mn} = 1 \Leftrightarrow m = n$, sonst Null ,

so nennt man $\{f_n(x)\}$ ein **Orthogonalsystem** .

Gilt $\int_a^b \left(f_n(x) \cdot f_m(x) \right) dx = d_{mn}$, so spricht man von einem **Orthonormalsystem** .

Beispiele :

1.) $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...\}$ $[a,b] = [-p, p]$

2.) Legendreschen Polynome auf $[a,b] = [-1,1]$

Def. trigonometrische Reihe :

Eine unendliche Reihe der Form

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot nt}$$

heisst **trigonometrische Reihe** .

Def. Fourier-Reihe :

f sei periodisch mit Periode $2p$ in $[-p,p]$, reell und (wenigstens uneigentlich) R-integrierbar .

Dann ist die Fourier-Reihe von $f(x)$ definiert als :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos nx dx \qquad \text{und}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin nx dx \qquad \text{und}$$

Einschub : $\int \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}$ $\qquad \int \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n}$

Satz zur Konvergenz :

Ist $f(x)$ in $[a,b]$ wenigstens uneigentlich absolut integrierbar , so streben die F-Koeffizienten gegen Null .

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0\right)$$

Lokalisationsprinzip :

Konvergenz oder Divergenz der Fourier-Reihe in einem Punkt hängt vom Verhalten der Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung von diesem Punkt ab .

Satz (Kriterium von Dini) :

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ konvergiert im Punkt x_0 , wenn für ein gewisses $h > 0$ gilt :

$$\int_0^h \frac{1}{t}\left| f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)\right| dt \qquad \text{existiert .}$$

Folgerung :

Falls die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion im Punkt x_0 konvergiert , dann ist der Grenzwert gleich $f(x_0)$.

Im Falle einer unstetigen Funktion ist der Grenzwert gleich $\frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{2}$.

Satz (Lipschitz-Kriterium) :

Die Fourier-Reihe der Funktion $f(x)$ konvergiert in einem Stetigkeitspunkt x_0 , wenn $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 einer Lipschitz-Bedingung genügt :

$$\left| f(x_0+t) - f(x_0)\right| \le L|t|^a \qquad ,0 < a \le 1 \text{ (Hölder-Bedingung) .}$$

Folgerung :

Die Fourier-Reihe einer stetigen Funktion konvergiert in einem Punkt , wenn dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung existiert .

Beispiele siehe Übungen (zu umfangreich)

Besselsche Ungleichung :

f^2 sei integrierbar auf $[-p, p]$, dann gilt :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f^2(x)dx$$

Gleichheitszeichen steht für $N = \infty$.

Weierstraßscher Approximationssatz :

Ist f in $[-p, p]$ stetig und gilt $f(p) = f(-p)$, so gibt es zu jedem $e > 0$ ein trigonometrisches Polynom $T_n(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} \left(a_m \cos mx + b_m \sin mx\right)$, so dass gleichmäßig für alle $x \in [-p, p]$ gilt : $\left| f(x) - T_n(x) \right| < e$.

Folgerung :

Jede in $[a, b]$ stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$ lässt sich dort als Polynom darstellen .

17. Hilbertraum

Def. :

Ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt heisst **vollständig** bzw. **Hilbert-Raum** , wenn jede konvergente Folge von Elementen gegen ein Element des Raumes konvergiert .
Ein vollständiger , normierter Raum heisst **Banachraum** .

Beispiele :

R^n, C^n , $l_2 = \left\{x : x = \sum |x_i|^2 < \infty\right\}$

Def. Orthonormalfolge :

Gilt $\forall m, n \quad \langle x_m, x_n \rangle = d_{mn}$, dann heisst (x_n) Orthonormalfolge .

18. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Def. :

Eine DGL n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form $F(x, y, y', ..., y^{(n)}(x)) \equiv 0$.
$y(x)$ heisst Lösung der DGL , falls sie (und die $y'(x)$) ,eingesetzt in die Gleichung , diese identisch erfüllen.
Eine DGL heisst **explizit** , falls diese nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist :

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$$

Satz :

Das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $x \le x \le a + x$, $y(x) = h$ hat bei beliebig wählbarem h genau eine Lösung , falls gilt :

$$\left| f(x, y) - f(x, y_1) \right| \le \left| y - y_1 \right| \qquad , L > 0 \ .$$

Satz :

Existieren die partiellen Ableitungen der Funktion f nach dem 2. bis zum (n+1)-ten Argument und sind diese stetig , so genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung .

Beispiel :

$y = |y|^{2/3}$, also $f(x,y) = y^{2/3}$

Für $y \neq 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-1/3}$, d.h. stetig . Es gilt also eine Lipschitz-Bedingung , und die DGL besitzt durch jeden Punkt (x,y) mit $y \neq 0$ eine eindeutige Lösung . Für $y = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht definiert .

Es könnte dort zwar trotzdem eine L-Bedingung gelten , aber da durch jeden Punkt auf der x-Achse unendlich viele Lösungen der DGL gehen ist dies nicht der Fall .

DGL - Typen :

Typ der getrennten Variablen :

$y' = f(x)g(y)$

D.h. $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx$

Beispiel :

1.) $y' = y$

$$\frac{dy}{dx} = y \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{y} dy = \int dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = x + C \;\Rightarrow\; |y| = e^{x+C} \;\Rightarrow\; y = Ce^x$$

2.) $y' = e^y \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = e^y \sin x \;\Rightarrow\; \int e^{-y} dy = \int \sin x dx \;\Rightarrow\; -e^{-y} = -\cos x + C$$

$$\Rightarrow\; e^{-y} = \cos x - C \;\Rightarrow\; y = -\ln(\cos x - C)$$

Satz :

y_0 sei ein innerer Punkt von I_y mit $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung des AWP

$y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ in einer Umgebung von x_0 .

Beispiel :

siehe oben : $y' = \sqrt{|y|}$, $y(x_0) = y_0$

$y_0 \neq 0$ liefert eindeutig bestimmte Lsg des AWP , $y_0 = 0$ nicht .

Lineare DGL 1. Ordnung :

$y'(x) + g(x)y = h(x)$, g, h stetig , heisst lineare DGL 1. Ordnung .

Im Fall $h \equiv 0$ spricht man von der homogenen linearen DGL 1. Ordnung , ansonsten von der inhomogenen .

Satz :

Das AWP $y'(x) + g(x)y = h(x)$, $y(x_0) = y_0$ hat bei obigen Voraussetzungen an g, h für jedes beliebige $y_0 \in R$ eine eindeutig bestimmte Lösung :

$$y(x) = \underbrace{y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}}_{\text{spezielle Lsg der homogenen Gleichung}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} h(t)e^{G(t)}dt \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} g(t)dt}}_{\text{Lsg der inhomogenen Gleichung}} .$$

Alles zusammen ist Lösung des AWP .

Typen von DGL , die sich auf diese transformieren lassen :

1.) Bernoullische DGL $y' + g(x)y + h(x)y^a = 0$ $a \neq 1$, g, h stetig

Substitution : $z(x) = y^{1-a}(x)$

2.) Riccatische DGL $y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x)$

Falls man eine Lösung $y_1(x)$ kennt , dann wird transformiert :

TODO

Exakte DGL :

Eine DGL der Form $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$, g, h stetig , heisst exakte DGL , wenn eine Funktion $F(x, y)$ existiert , so dass $F_x = g(x, y)$ und $F_y = h(x, y)$ gilt .

Satz :

$y(x)$ ist genau dann eine Lösung der exakten DGL $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$,
wenn $F(x, y(x)) \equiv const$ ist .
Und die Stammfunktion $F(x, y)$ existiert , wenn gilt :

$$g_y = h_x \quad .$$

Um aus einer nicht exakten eine exakte DGL zu machen kann man versuchen , einen Multiplikator $M(x, y)$ zu finden , so dass $(g \cdot M)_y = (h \cdot M)_x$. Meistens probiert man $M = M(x)$ oder $M = M(y)$.

Beispiel :

$ydx + 2xdy = 0$, $g = y$, $h = 2x$, $g_y \neq h_x$, d.h. DGL ist nicht exakt .

Multiplikation mit $M = M(y) = y$ ergibt :

$y^2 dx + 2xydy = 0$, $g = y^2$, $h = 2xy$, $g_y = h_x$, die DGL ist also exakt .

Implizite DGL 1. Ordnung :

Grundgedanke : y' wird als Parameter benutzt

$$y' = p \; , \left(\frac{dy}{dx} = p \right) \quad , \quad x = x(p) \quad , \quad y = y(p)$$

$$\frac{dy}{dp} = \dot{y} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dp} = y'\dot{x} = p\dot{x}$$

$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ Es gebe eine Parameterdarstellung , so dass $F(x(p), y(p), p) = 0$ ist .
(Wünschenswert ist eine parameterfreie Lösung .)

Beispiel :

$y = xy' + y'^2 \quad , \quad f(y') = y' \quad , \quad g(y') = y'^2$

$\Rightarrow y(p) = xp + p^2 \quad , \quad x + \dot{g} = 0$, d.h. $x = -\dot{g} = -2p$

x ersetzen :

$y(p) = -2p^2 + p^2 = -p^2$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2$

$f(C) = C$ gilt , also ist zusätzlich Lösung : $y = Cx + C^2 \quad , C \in R$

Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung :

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \quad , \quad \bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b} \quad , \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Auch hier ist das AWP immer dann eindeutig lösbar , wenn $\left\| \bar{f}(x, \bar{y}_1) - \bar{f}(x, \bar{y}_2) \right\| \leq L \left\| \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\|$.

Bzw. sind alle Komponenten von A und b stetig, so ist das AWP $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}$ eindeutig lösbar .

Satz :

Sämtliche Lösungen des DGL Systems bilden einen Vektorraum .
Die maximale Anzahl linear unabhängiger Lösungen ist die Dimension des Vektorraums .
Ist A stetig , dann ist die Dimension dieses Vektorraums n und das AWP somit eindeutig lösbar .

Def. Fundamentalsystem :

n linear unabhängige Lösungen des DGL Systems $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$ heissen Fundamentalsystem .

Def. Wronski-Determinante :

Sind $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$ Lösungen des DGL Systems $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$, so heisst

$W(\bar{y}_1 ... \bar{y}_n) = \det(\bar{y}_1 ... \bar{y}_n)$ Wronski-Determinante von $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$.

Satz :

Sind $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$ Lösungen des DGL Systems , so ist entweder $W(\bar{y}_1 ... \bar{y}_n) = 0$ oder $W(\bar{y}_1 ... \bar{y}_n) \neq 0$.

$\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n$ ist genau dann ein Fundamentalsystem , wenn $W(\bar{y}_1 ... \bar{y}_n) \neq 0$

Beispiel :

$y_1' = \frac{1}{t} y_1 - y_2 + t$

$y_2' = \frac{1}{t^2} y_1 + \frac{2}{t} y_2 - t^2$ D.h. $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} y$. $\quad , \quad y_1, y_2 \in [a, b] \quad , a > 0$

Lösungen des homogenen Systems :

$$y_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \quad , \quad y_2 = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t + t \ln t \end{pmatrix}$$

Sind die Lösungen linear unabhängig ?

$$W(y_1 y_2) = \det\begin{pmatrix} t^2 & -t^2 \ln t \\ -t & t + t\ln t \end{pmatrix} = t^3 + t^3 \ln t - t^3 \ln t = t^3 \quad \neq 0 \qquad \text{, da } a > 0$$

$\Rightarrow$ Die Lösungen sind ein Fundamentalsystem .

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung des homogenen Systems : $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten :

Ansatz : $\overline{y} = \overline{C} \cdot e^{lx}$ (l muss Eigenwert sein und $\overline{C}$ zugehöriger Eigenvektor .)

Beispiel :

$$y_1' = y_1 - 2y_2$$
$$y_2' = 2y_1 - y_3$$
$$y_3' = 4y_1 - 2y_2 - y_3$$

D.h. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A - lE) = \begin{vmatrix} 1-l & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1-l)\begin{vmatrix} 1-l & -2 \\ 2 & -l \end{vmatrix}$

$$= -2 + 2l + 8 - (1-l)(l^2 - l + 4) = \ldots = (1-l)(l^2 + l + 2)$$

$$l_1 = 1 \; , \qquad l_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{7}{2}}$$

...

Satz :

Die Lösungen sind genau dann linear unabhängig , wenn die $\overline{C}_j$ linear unabhängig sind .

Satz :

Komplexe Lösungen werden durch Bildung des Realteils und Imaginärteils in reelle Lösungen umgewandelt .

Satz :

Ist l eine k-fache Nullstelle des charakterischen Polynoms $\det(A - lE) = 0$, dann gibt es k linear unabhängige Lösungen $y_i(x) = p_i(x) \cdot e^{lx}$, i=0,...,k-1 ,
wobei jede Komponente von $p_i(x)$ ein Polynom von höchstens Grad i ist .

Lineare DGL n-ter Ordnung :

$$Ly = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) \equiv b(x)$$

Sind die Koeffizienten $a_i(x)$ und $b(x)$ stetig in $[a,b]$, dann hat das AWP genau eine Lösung , welche in ganz $[a,b]$ existiert .

Satz :

Die Dimension des Lösungsraums der Lösungen von $Ly \equiv 0$ ist n .

Def. :

$y_1(x),\dots,y_n(x)$ seien Lösungen von $Ly \equiv 0$.

$$W(y_1 y_2 \dots y_n) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_n'(x) \\ & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$ heisst Wronski-Determinante .

Satz :

Sind $y_1,\dots,y_n$ Lösungen des DGL Systems , so ist entweder $W(y_1 \dots y_n) = 0$ oder $W(y_1 \dots y_n) \neq 0$.
$y_1,\dots,y_n$ ist genau dann ein Fundamentalsystem (d.h. linear unabhängig) , wenn $W(y_1 \dots y_n) \neq 0$

Beispiel :

$x^2 y'' + xy' + y = 0$ - Eulersche DGL

$x = e^t \quad \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = e^t$

$\Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dot{y}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{e^t} = \dfrac{\dot{y}}{x}$

$\Rightarrow y'' = -\dfrac{1}{x^2}\dot{y} + \dfrac{1}{x}\ddot{y}\dfrac{dt}{dx} \quad = -\dfrac{\dot{y}}{x^2} + \dfrac{\ddot{y}}{x^2} = \dfrac{\ddot{y} - \dot{y}}{x^2}$

$\Rightarrow x^2\left(\dfrac{\ddot{y} - \dot{y}}{x^2}\right) + x\left(\dfrac{\dot{y}}{x}\right) + y = 0$

$\Rightarrow \ddot{y} + y = 0$

$\Rightarrow y = x^l \quad , \quad y' = l x^{l-1} \quad , \quad y'' = l(l-1)x^{l-2}$

D.h. $l(l-1)x^l + l x^l + x^l = 0$

$\Rightarrow l(l-1) + l + 1 = 0 \quad \Rightarrow l^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow l_1 = i \quad , \quad l_2 = -i$

$\Rightarrow y = x^i = e^{i \ln x} = \cos(\ln x) + i\sin(\ln x)$

$\Rightarrow y_1 = \cos(\ln x) \quad , \quad y_2 = \sin(\ln x)$

$$W(y_1 y_2) = \begin{pmatrix} \cos(\ln x) & \sin(\ln x) \\ \dfrac{-\sin(\ln x)}{x} & \dfrac{\cos(\ln x)}{x} \end{pmatrix} = \frac{\cos^2(\ln x)}{x} + \frac{\sin^2(\ln x)}{x} = \frac{1}{x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Gleichung : $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad , C_1, C_2 \in R$.

Lösung der inhomogenen DGL mittels Variation der Konstanten :

$C_1(x)' y_1 + C_2(x)' y_2 = 0$

$C_1(x)' y_1' + C_2(x)' y_2' = x$

Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten :

$$Ly = y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) \equiv b(x)$$

Satz :

Ist l eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $l^n + a_{n-1}l^{n-1} + ... + a_1 l + a_0 = 0$,
so erhält man k linear unabhängige Lösungen :

$$e^{lx} \quad , \quad xe^{lx} \quad , \quad ... \quad , \quad x^{k-1}e^{lx} \quad .$$

(Im komplexen Fall ergeben sich diese Lösungen durch Bildung von Real- und Imaginärteil .)

Rand- und Eigenwertprobleme :

$$Ly(x) = b(x)$$

$$Ly(x) = y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

verschiedene Randbedingungen :

1. Art : $y(a) = R_1(y) \quad , \quad y(b) = R_2(y)$
2. Art : $y'(a) = R_1'(y) \quad , \quad y'(b) = R_2'(y)$
3. Art : $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = R_1(y)$ - Sturmsche Randbedingungen
   $b_1 y(b) + b_2 y'(b) = R_2(y)$

Def. :

Das Randwertproblem $Ly(x) = (p(x)y')' + q(x)y = g(x)$ mit $R_1(y), R_2(y)$ wie oben
heisst Sturmsches Randwertproblem.

Satz :

Bilden $y_1(x), y_2(x)$ ein Fundamentalsystem von $Ly(x) \equiv 0$, dann ist das inhomogene Sturmsche
Randwertproblem genau dann lösbar , wenn $\det\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \neq 0$.

Das zugehörige homogene Sturmsche RWP besitzt dann nur die triviale Lösung , d.h. das inhomogene Sturmsche RWP ist eindeutig lösbar .

Beispiel :

$$y'' + y = g(x) \qquad , \; [a,b] = [0,p]$$

Für die homogene Gleichung $y'' + y = 0$ folgt :

$$l^2 + l = 0$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = e^{\pm ix} \qquad \Rightarrow y_1(x) = \cos x \quad , \quad y_2(x) = \sin x$$

Für

$$R_1(y) = y(0) + y'(0)$$

$$R_2(y) = y(p) \qquad \text{folgt :}$$

$$\det\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 - \sin 0 & \sin 0 + \cos 0 \\ \cos p & \sin p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Wählt man aber

$R_1(y) = y(0)$

$R_2(y) = y(p)$, dann folgt :

$$\det\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos p & \sin p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

<u>19. Das Lebesgue-Integral</u>

<u>Def. Algebra :</u>

Ein nichtleeres Mengensystem $S \subseteq P(X)$ von Teilmengen einer Grundmenge X heisst **<u>Algebra</u>**, falls gilt:

1.) $A \in S \quad \Rightarrow \quad (X \setminus A) \in S$

2.) $A, B \in S \quad \Rightarrow \quad (A \cup B) \in S$

Gilt ausserdem noch :

3.) $A_i \in S$ und $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = S$, dann heisst S s -Algebra .

<u>Beispiel :</u>

X beliebig , dann ist $P(X)$ eine s -Algebra .

<u>Def. Lebesgue-Maß :</u>

Sei $A \subseteq R^n$, dann heisst $l(A) = \inf \left\{ \sum_j \left| I_j \right| , A \subset \bigcup_{j \in B} I_j \right\}$ **<u>äusseres Lebesgue-Maß</u>** von A .

(B darf höchstens abzählbar sein .)

<u>Eigenschaften des äusseren L-Maßes :</u>

Sei $A, B \subseteq R^n$ und $|A|_i , |A|_a$ wie gehabt das innere bzw. äussere J-R-Maß .

Dann gilt :

1.) $0 \le l(A) \le +\infty$

2.) $A \subset B \Rightarrow l(A) \le l(B)$

3.) $l(\bigcup A_i) \le \sum_i l(A_i)$, falls die A_i abzählbar sind

4.) $A \subset R^n$ und beschränkt , dann ist $|A|_i \le l(A) \le |A|_a$

5.) Das Lebesgue-Maß ist invariant gegenüber Translationen .

<u>Folgerung :</u>

Ist A J-R-messbar , so auch L-messbar .

Beispiel :

$M = \{(x,y) \in R^2 : |x|,|y| \leq 1 \quad , \quad x, y \text{ rational}\}$ D.h. Quadrat ohne die reellen Punkte .

$|M|_i = 0 \quad , \quad |M|_a = 1 \quad , \quad l(M) = 0$

Def. :

Gilt eine Aussage bis auf eine Menge vom Maß Null , dann sagt man , die Aussage gilt **fast überall** .
(Die leere Menge , abzählbare Mengen und Kreuzprodukt abzählbarer Mengen sind vom Maß Null .)

Def. Lebesgue-messbar :

$A \subseteq R^n$ heisst **Lebesgue-messbar** genau dann , wenn gilt :

$\forall E \subseteq R^n : \; l(E) = l(E \cap A) + l(E \cap A')$ ($A' = R^n \setminus A$) .

Beispiel :

1.) $A = R^n$

L-messbar gdw. :

$l(E) = l(E \cap R^n) + l(E \cap R^n{}')$

$l(E) = l(E) + l(\emptyset)$, d.h.

$l(E) = l(E)$

gilt für alle $E \subseteq R^n$, also ist $A = R^n$ L-messbar .

Satz :

Das Mengensystem L_n aller L-messbaren Mengen des R^n ist eine s -Algebra , welche die JR-messbaren Mengen enthält .

Beispiel eines beschränkten Gebietes , welches keinen JR-Inhalt besitzt :

$$C = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \quad , a_j \in \{1,2\} \right\}$$

D.h.: Entferne aus $[0,1]$ das mittlere Drittel $(1/3\,,\,2/3)$, in den verbliebenen Intervallen $[0,\,1/3]$ und $[2/3\,,1]$ jeweils wieder das mittlere Drittel usw.

TODO.....

Das Lebesgue-Integral im R^n :

Die Menge aller Funktionen $f : B \to \overline{R}$ die ein L-Integral besitzen , wird mit $L(B)$ bezeichnet .

Satz :

$B \subset R^n$ sei beschränkt und besitze ein JR-Maß und $f : B \to R$ sei beschränkt auf B und $f \in L(B)$.
Dann ist f genau dann über B Riemann-integrierbar , wenn f fast überall auf B stetig ist .

Beispiel :

$f:[0,1]\rightarrow R$ $\qquad$ $f(x)=\begin{cases}1 & ,x \text{ rational}\\ 0 & ,x \text{ irrational}\end{cases}$

$f(x)=0$ fast überall auf $[0,1]$

TODO....

Stetig in den rationalen Punkten ? TODO

Anhang

Def. hinreichend bzw. notwendig :

$A\Rightarrow B$

B ist notwendige Bedingung für A

A ist hinreichende Bedingung für B