Georg Kuschk - Stochastik Serie 6

Bisher nur :

Aufgabe 6.1 :

???

Aufgabe 6.2 :

a)
charakteristische Funktion der Gammaverteilung :

$$j_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx} \cdot f_{l,a}(x)dx = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \frac{l^a}{\Gamma(a)} e^{-lx} \cdot x^{a-1}dx$$

$$= \frac{l^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{(it-l)x}dx = \frac{l^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-(l-it)x}dx = \frac{l^a}{\Gamma(a)\cdot(l-it)^a} \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

$$= \frac{l^a}{\Gamma(a)\cdot(l-it)^a} \cdot \Gamma(a) = \underline{\left(\frac{l}{l-it}\right)^a}$$

charakteristische Funktion der Exponentialverteilung :

Da die Exponentialverteilung Spezailfall der Gammaverteilung für a=1 ist, lautet hier die

charakteristische Funktion $\underline{j_X(t) = \frac{l}{l-it}}$.

b)
Nach dem Additionstheorem der Gammaverteilung gilt, dass die Summe zweier
$\Gamma(a, l)$ - bzw. $\Gamma(b, l)$ -verteilter unabhängiger Zufallsgrößen $\Gamma(a+b, l)$ -verteilt ist.
Die Summe $x_1 + ... + x_n$ (x_i unabhängig und $\Gamma(1, l)$ -verteilt i=1,...,n)
ist somit $\Gamma(n, l)$ -verteilt.

Aufgabe 6.3 :

<u>VORSICHT ! – bin mir hier SEHR unsicher</u>

Seien Z_i die zu rundenden Zahlen und $X_i \in [-0.05, +0.05]$ die jeweiligen Rundungsfehler , i=1,...,1000
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der absolute Fehler einer Summe von 1000 gerundeten Zahlen kleiner als 2 ist.

Lösung : Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes

Seien n die Anzahl der zu rundenden Zahlen und d der maximale Betrag des absoluten Fehlers der Summe.

Summe der Rundungsfehler : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$E(X_i) = \frac{-0.05 + 0.05}{2} = 0 \qquad Var(X_i) = \frac{1}{12}(0.05 - (-0.05))^2 = \frac{1}{120}$$

Da die zu rundenden Zahlen nicht voneinander abhängen, sind die Rundungsfehler X_i also unabhängig.
Desweiteren ist S_n asymptotisch normalverteilt.

Es ist also $Var(S_n) = \frac{n}{120} = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{n}{120}}$, n>0

Und somit gilt $P(-d < S_n < d) = \Phi\left(\frac{d}{s}\right) - \Phi\left(\frac{-d}{s}\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{d}{s}\right) - 1 = 2\cdot\Phi\left(d\,\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{n}}\right) - 1$

Für $|d| = 2$ und n=1000 ergibt sich somit

$$P(-2 < S_n < 2) = 2\cdot\Phi\left(2\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{1000}}\right) - 1 = 2\cdot\Phi\left(2\sqrt{0.12}\right) - 1 \approx 2\cdot\Phi(0.693) - 1$$
$$\approx 2\cdot 0.7549 - 1 \approx 0.5098$$

D.h. der absolute Fehler der Summe von den 1000 Zahlen ist mit 51%iger Wahrscheinlichkeit kleiner als 2 .

Aufgabe 6.4 :

a)Chebyshev-Ungleichung

???

b) zentraler Grenzwertsatz

VORSICHT ! – bin mir hier SEHR unsicher

Sei $X_i = \begin{cases} 1, Schneiden \\ 0, nichtSchneiden \end{cases}$ und $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Der Fehler $\left|\frac{S_n}{n} - p\right|$ soll mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 kleiner als 0.01 sein.

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < 0.01\right) \geq 0.99$$

D.h. $P\left(|S_n - np| \leq 0.01n\right) = P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

Wegen $p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$ für alle $p \in [0,1]$ ist $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{0.01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \geq P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq 0.02\sqrt{n}\right) *$$

Für grösser werdende n wird der zentrale Grenzwertsatz wirksam (N(0,1)-Verteilung),
d.h. * wird durch $\Phi(0.02\sqrt{n}) - \Phi(-0.02\sqrt{n}) = 2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1$ approximiert.

$$\Rightarrow 2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1 = 0.99 \Rightarrow \Phi(0.02\sqrt{n}) = 0.995 \Rightarrow 0.02\sqrt{n} \approx 2.58 \Rightarrow n \approx 16641$$

Um die gewünschte Genauigkeit von p zu erreichen, müssen also mindestens 16641
Versuche durchgeführt werden.