Georg Kuschk - Stochastik Serie 5

Aufgabe 5.1 :

a)

Beweise, daß gilt : $P(x \geq e) \leq \frac{E(e^{ax})}{e^{ae}}$ $\quad ,(e > 0)$

Beweis :

Sei $Y = e^{ax}$ und $z = e^{ae}$.
Dann gilt : $P(x \geq e) = P(ax \geq ae) = P(e^{ax} \geq e^{ae}) = P(Y \geq z)$

Nach Tschebyscheffscher Ungleichung ist $P(Y \geq z) \leq \frac{E(Y)}{z}$.

Also ist $P(x \geq e) \leq \frac{E(e^{ax})}{e^{ae}}$. q.e.d.

b)
???

Aufgabe 5.2 :

Sei x die Anzahl der gelegten Eier und h die Anzahl der Eier, die sich entwickeln.
Die Anzahl der Nachkommen ist binomialverteilt (Bernoulli-Experiment mit zwei möglichen Ausgängen).

Verteilung :

$$P(h = m \mid x = n) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

Mittlere Anzahl von Nachkommen :
Sei die Entwicklung der Insekten durch die Zufallsgrößen v_i $\quad (i = 1,\ldots,x \quad ; \quad v_i \in \{0,1\})$ beschrieben.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{x} E(v_i) = \sum_{i=1}^{x} p = x \cdot p$$

Aufgabe 5.3 :

$$E(r) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(r = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(r \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(x_1 + \ldots + x_{k-1} < 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{k-1} f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_{k-1}) dx_1 \ldots dx_{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{k-1} 1 dx \ldots dx = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{k-2} x dx \ldots dx \Bigg|_0^1$$

$$= \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \Bigg|_0^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = e$$

Aufgabe 5.4 :

a)

gegeben : $P(x=\sqrt{k})=\dfrac{6}{p^2k^2}$ $\rightarrow$ Dichtefunktion $f(\sqrt{k})=\dfrac{6}{p^2k^2}$

Prüfen ob der Erwartungswert existiert :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{k}\right|\cdot\frac{6}{p^2k^2}\,dk=\frac{6}{p^2}\int_{-\infty}^{\infty}k^{-\frac{3}{2}}dk=\frac{6}{p^2}\left(-\frac{2}{\sqrt{k}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=0$$ d.h. Erwartungswert existiert

Prüfen ob Varianz existiert :
Varianz existiert, wenn $E(X^2)$ existiert

$$\int_{-\infty}^{\infty}|k|\frac{6}{p^2k^2}\,dk=\frac{6}{p^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|k|}\,dk=\frac{6}{p^2}\ln k\Big|_{-\infty}^{\infty}$$ $\Rightarrow$ Integral existiert nicht

$\Rightarrow E(X^2)$ existiert nicht $\Rightarrow$ Varianz existiert nicht

b)

Prüfen ob der Erwartungswert existiert :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{p}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{u}du=\frac{1}{2p}\ln u\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{2p}\ln(x^2+1)\Big|_{-\infty}^{\infty}=\infty$$

$\Rightarrow$ Das Integral konvergiert nicht und die CAUCHY-Verteilung besitzt somit keinen Erwartungswert.