Georg Kuschk – Stochastik Serie 4

Aufgabe 4.1:

a)

$$\int_0^\infty C_1 \cdot x^a \cdot e^{-bx} dx \qquad \text{Substitution } bx = z, bdx = dz$$

$$= C_1 \int_0^\infty \left(\frac{z}{b} \right)^a \cdot e^{-z} \cdot \frac{1}{b} dz = \frac{C_1}{b^{a+1}} \int_0^\infty z^a e^{-z} dz = C_1 \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} = 1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_2 \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = C_2 \cdot \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = C_2 \cdot \frac{p}{2} + C_2 \cdot \frac{p}{2} = 1$$

$$\Rightarrow C_2 \cdot p = 1$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{p}$$

Aufgabe 4.2:

Gegeben : x_1 und x_2 unabhängig und $P(x_i = k) = (1-p)^k p$ (k=0,1,... i=0,1 $0 \le p \le 1$)

Gesucht : $P(k = \max(x_1, x_2))$

Es sind 3 unterschiedliche Fälle zu betrachten :

<u>Fall 1 :</u> $x_1 = x_2 = k$

$$P(x_1 = k, x_2 = k) = P(x_1 = k) \cdot P(x_2 = k) = (1-p)^{2k} p^2$$

<u>Fall 2 :</u> $x_1 = k, x_1 > x_2$

$$P(x_1 = k, x_2 < k) = P(x_1 = k) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} P(x_2 = i) = (1-p)^k p \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^i p$$

<u>Fall 3 :</u> $x_2 = k, x_2 > x_1$

$$P(x_2 = k, x_1 < k) = P(x_2 = k) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} P(x_1 = i) = (1-p)^k p \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^i p$$

Da x_1 und x_2 unabhängig sind, gilt für die Verteilung :

$$\begin{aligned} P(k = \max(x_1, x_2)) &= P(x_1 = k, x_2 = k) + P(x_1 = k, x_2 < k) + P(x_2 = k, x_1 < k) \\ &= (1-p)^{2k} p^2 + 2(1-p)^k p \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^i p \\ &= (1-p)^{2k} p^2 + 2(1-p)^k p^2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^i \\ &= (1-p)^{2k} p^2 + 2(1-p)^k p^2 \cdot \left(-\frac{(1-p)^k - 1}{p} \right) \\ &= \underline{(1-p)^{2k} p^2 - 2(1-p)^{2k} p + 2(1-p)^k p} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 4.2:

Noch zu zeigen : $\sum_{k=0}^{\infty} P(h = k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((1-p)^{2k} p^2 - 2(1-p)^{2k} p + 2(1-p)^k p\right)$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k} - 2p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k} + 2p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k$$

$$= p^2\left(-\frac{1}{p(p-2)}\right) - 2p\left(-\frac{1}{p(p-2)}\right) + 2p\frac{1}{p}$$

$$= -\frac{p}{p-2} + \frac{2}{p-2} + 2 = \frac{2-p}{p-2} + \frac{2(p-2)}{p-2} = \frac{2-p+2p-4}{p-2} = \frac{p-2}{p-2} = 1$$

q.e.d.

Aufgabe 4.3:

$$P(x_1 + x_2 = h) = P(\bigcup_i (x_1^{-1}(i) \cap x_2^{-1}(i)))$$

$$= \sum_i P(x_1 = i, x_2 = h - i) = \sum_i (P(x_1 = i) \cdot P(x_2 = h - i))$$

$$= \sum_{i=0}^{h}\left(\frac{l_1^{\,i}}{i!} e^{-l_1} \cdot \frac{l_2^{\,h-i}}{(h-i)!} e^{-l_2}\right) = e^{-(l_1+l_2)} \cdot \sum_{i=0}^{h}\left(l_1^{\,i} \cdot l_2^{\,h-i} \cdot \frac{1}{i!(h-i)!} \cdot \frac{h!}{h!}\right)$$

$$= \frac{e^{-(l_1+l_2)}}{h!} \cdot \sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i} \cdot l_1^{\,i} \cdot l_2^{\,h-i}$$

$$= e^{-(l_1+l_2)} \cdot \frac{(l_1 + l_2)^h}{h!}$$

D.h. die Summe zweier unabhängiger, POISSON-verteilter Zufallsgrößen ist wieder POISSON-verteilt.

Aufgabe 4.4:

x sei N(0,1) verteilt

Die Dichtefunktion ist f(x)= $\frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Zuerst die Wahrscheinlichkeiten ausrechnen :

$$P(-k < x < k) = \int_{-k}^{k} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_{-k}^{k} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \qquad k \in \{1,2,3\}$$

<u>k=1:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_{-1}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx \approx 0.6827$$

<u>k=2:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_{-2}^{2} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \int_{0}^{\frac{2}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \int_{0}^{\sqrt{2}} e^{-x^2} dx \approx 0.9545$$

<u>k=3:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_{-3}^{3} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \int_{0}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx \approx 0.9973$$

zu Aufgabe 4.4:

Nun die Abschätzungen mittels Tschebyscheffscher Ungleichung :

Es gilt : $P(-k < x < k) = P(|x| < k) = 1 - P(|x| \geq k)$

$Var(x) = 1$

Nach Tschebyscheffscher Ungleichung ist $P(|x| \geq k) \leq \frac{Var(x)}{k^2}$

<u>k=1:</u>

$$P(|x| \geq 1) \leq \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow P(|x| < 1) \geq 0$$

<u>k=2:</u>

$$P(|x| \geq 2) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(|x| < 2) \geq \frac{3}{4}$$

<u>k=3:</u>

$$P(|x| \geq 3) \leq \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow P(|x| < 1) \geq \frac{8}{9}$$

Schlussfolgerung :
Die Abschätzungen mittels Tschebyscheffscher Ungleichung sind sehr ungenau und haben nur begrenzt Aussagekraft.