Aufgabe 3.1:

$$E(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P(x=m) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} P(x=m)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty} P(x=m) = \sum_{k=1}^{\infty} P(x \geq m)$$

$$D^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-E(x))^2 \cdot P(x=k) = \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 2k\cdot E(x) + (E(x))^2)\cdot P(x=k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + (k-k) - 2k\cdot E(x))\cdot P(x=k) + (E(x))^2$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\cdot P(x=k) - E(x) - 2(E(x))^2 + (E(x))^2$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(2\sum_{m=1}^{k} m\right)\cdot P(x=k) - E(x)\cdot(E(x)+1)$$
$$= 2\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot P(x \geq m) - E(x)\cdot(E(x)+1)$$ q.e.d.

Aufgabe 3.2:

- Binomial-Verteilung : $P(x=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k (1-p)^{n-k}$ k=0,...,n

Es soll gelten $P(x=k_0) \geq P(x=k_0-1)$

$$\Rightarrow \binom{n}{k_0} p^{k_0}(1-p)^{n-k_0} \geq \binom{n}{k_0-1} p^{k_0-1}(1-p)^{n-k_0+1}$$

$$\frac{n-k_0+1}{k_0} p \geq 1-p \Rightarrow (n+1)p \geq k_0$$

Es soll gelten $P(x=k_0) \geq P(x=k_0+1)$

$$\Rightarrow \binom{n}{k_0} p^{k_0}(1-p)^{m-k_0} \geq \binom{n}{k_0+1} p^{k_0+1}(1-p)^{n-k_0-1}$$

$$(1-p) \geq \frac{n-k_0}{k_0+1} p \Rightarrow (k_0+1) \geq (n+1)p$$

Und somit ist schließlich $(n+1)p - 1 \leq k_0 \leq (n+1)p$

- Poisson-Verteilung : $P(x = k) = \frac{l^k}{k!} e^{-l}$ k=0,1,...

Es soll gelten $P(x = k_0) \geq P(x = k_0 - 1)$

$$\Rightarrow \frac{l^{k_0}}{k_0!} e^{-l} \geq \frac{l^{k_0-1}}{(k_0-1)!} e^{-l}$$

$\frac{l}{k_0} \geq 1$,d.h. $k_0 \leq l$

Es soll gelten $P(x = k_0) \geq P(x = k_0 + 1)$

$$\Rightarrow \frac{l^{k_0}}{k_0!} e^{-l} \geq \frac{l^{k_0+1}}{(k_0+1)!} e^{-l}$$

$1 \geq \frac{l}{k_0 + 1}$,d.h. $k_0 + 1 \geq l$

Und somit ist schließlich $l - 1 \leq k_0 \leq l$

- Hypergeometrische Verteilung : $P(x = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Es soll gelten $P(x = k_0) \geq P(x = k_0 - 1)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \binom{M}{k_0} \cdot \binom{N-M}{n-k_0} &\geq \binom{M}{k_0-1} \cdot \binom{N-M}{n-k_0+1} \\
\frac{M - k_0 + 1}{k_0} &\geq \frac{N - M - n + k_0}{n - k_0 + 1} \\
(M - k_0 + 1)(n - k_0 + 1) &\geq (N - M - n + k_0)k_0 \\
(1+M)(n+1) - k_0(M + n + 2) + k_0^2 &\geq (N - M - n)k_0 + k_0^2 \\
(n+1)(M+1) - 2k_0 &\geq N \cdot k_0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_0 \leq \frac{M+1}{N+2}(n+1)$$

Es soll gelten $P(x = k_0) \geq P(x = k_0 + 1)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \binom{M}{k_0} \cdot \binom{N-M}{n-k_0} &\geq \binom{M}{k_0+1} \cdot \binom{N-M}{n-k_0-1} \\
\frac{N - M - n + k_0 + 1}{n - k_0} &\geq \frac{M - k_0}{k_0 + 1} \\
(N - M - n + k_0 + 1)(k_0 + 1) &\geq (M - k_0)(n - k_0) \\
k_0^2 + k_0(N - M - n + 2) + (N - M - n + 1) &\geq k_0^2 - k_0(M + n) + M \cdot n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (N+2) \cdot k_0 &\geq n \cdot M \cdot n - N + M + n - 1 \\
&= (M+1)(n+1) - (N+2)
\end{aligned}$$

Und somit ist schließlich $(n+1)\frac{M+1}{N+2} - 1 \leq k_0 \leq (n+1)\frac{M+1}{N+2}$

Aufgabe 3.3:

$$1-\Phi(x)=\int_x^\infty j(t)dt=\int_x^\infty \underbrace{\frac{1}{t}}_{v}\cdot\underbrace{t\cdot j(t)}_{u'}dt \qquad \text{(partielle Integration)}$$

$$=-\frac{1}{t}j(t)\Big|_x^\infty-\int_x^\infty\frac{1}{t^2}\cdot j(t)dt \quad =\frac{1}{x}\cdot j(x)-\underbrace{\int_x^\infty\frac{1}{t^2}\cdot j(t)dt}_{>0} \qquad \left(\Rightarrow 1-\Phi(x)<\frac{1}{x}\cdot j(x)\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot j(x)-\int_x^\infty\frac{1}{t^3}\cdot t\cdot j(t)dt \qquad \text{(partielle Integration)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot j(x)+\frac{1}{t^3}\cdot j(t)\Big|_x^\infty+\int_x^\infty\left(-\frac{3}{t^4}\right)(-j(t))dt$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\cdot j(x)+3\cdot\underbrace{\int_x^\infty\frac{1}{t^4}\cdot j(t)dt}_{>0}$$

$$\Rightarrow 1-\Phi(x)>\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\cdot j(x)$$

Aufgabe 3.4:

Für $x\sim B(n,p)$ ist $F_p(k)=P(x\le k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i(1-p)^{n-i}$ k=0,...,n

Betrachte die Darstellung $F_p(k)=\int_{p_0}^{p}\frac{d}{dx}F_x(k)dx$

a) & b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}F_p(k) &=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot\left(i\cdot p^{i-1}(1-p)^{n-i}-p^i(n-i)(1-p)^{n-i-1}\right)\\ &=n\sum_{i=1}^{k}\binom{n-1}{i-1}\cdot p^{i-1}(1-p)^{n-i}-n\sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i}\cdot p^i(1-p)^{n-i-1}\\ &=n\sum_{i=1}^{k}\binom{n-1}{i-1}\cdot p^{i-1}(1-p)^{n-i}-n\sum_{i=1}^{k+1}\binom{n-1}{i-1}\cdot p^{i-1}(1-p)^{n-i}\\ &=-n\cdot\binom{n-1}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k-1}\le 0\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung aus b)

Bestimmung von p_0 :

k=0 : $\frac{d}{dp}F_p(0) \quad =-n(1-p)^{n-1}$

$$F_p(0)=\int_{p_0}^{p}-n(1-x)^{n-1}dx$$

$$=(1-x)\Big|_{p_0}^{p}=(1-p)^n-(1-p_0)^n$$

Es ist aber auch $F_p(0)=\binom{n}{0}\cdot p^0(1-p)^{n-0}=(1-p)^n \qquad \Rightarrow p_0=1$

Somit ist $F_p(k)$

$$= \int_1^p -n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot x^k (1-x)^{n-k-1} dx$$

$$= \binom{n}{k} \cdot (n-k) \cdot \int_p^1 x^k (1-x)^{n-k-1} dx$$

Hieraus folgt die Behauptung aus a)