Georg Kuschk – Stochastik Serie 2

Aufgabe 2.1:

Es ist $P(A|C) = P(A \cap \Omega|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap B_i|C)$ *

und weiterhin gilt :

$$P(A \cap B_i|C) = \frac{P(A \cap B_i \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B_i \cap C) \cdot P(A|B_i \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(B_i \cap C)}{P(C)} \cdot P(A|B_i \cap C) = P(B_i|C) \cdot P(A|B_i \cap C)$$

Setzt man den letzten zusammenhang in * ein folgt :

$$P(A|C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|C) \cdot P(A|B_i \cap C) \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 2.2:

Seien A = {„erste Münze ist golden“}
B = {„zweite Münze ist golden“}
S_1 = {„wähle 1. Schachtel (2 mal golden)“}
S_2 = {„wähle 2. Schachtel (2 mal silbern)“}
S_3 = {„wähle 3.Schachtel (golden , silbern)“}

Es gilt : $P(S_i) = \frac{1}{3}$ i=1,2,3

Gesucht : $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(S_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|S_i) \cdot P(S_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2.3:

Wahl des Weges A,B,C : $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

Desweiteren seien S = {„zu spät“} und R = {„es regnet“} mit $P(R) = \frac{1}{4}$ d.h. $P(\overline{R}) = \frac{3}{4}$

Es ist auch noch gegeben :

$$P(S|R \cap A) = 0.06 \qquad P(S|\overline{R} \cap A) = 0.05$$
$$P(S|R \cap B) = 0.15 \qquad P(S|\overline{R} \cap B) = 0.10$$
$$P(S|R \cap C) = 0.12 \qquad P(S|\overline{R} \cap C) = 0.15$$

a) gesucht : $P(C|\overline{R}\cap S)$

$$P(C|\overline{R}\cap S)=\frac{P(S\cap\overline{R}\cap C)}{P(S\cap\overline{R})} \qquad \text{(Def. bedingte Wahrscheinlichkeit)}$$

A , B und C bilden ein vollständiges Ereignissystem, somit gilt :

$$\begin{aligned} P(S\cap\overline{R}) &= P(S\cap\overline{R}\cap A)+P(S\cap\overline{R}\cap B)+P(S\cap\overline{R}\cap C)\\ &= P(\overline{R}\cap A)\cdot P(S|\overline{R}\cap A)+P(\overline{R}\cap B)\cdot P(S|\overline{R}\cap B)+P(\overline{R}\cap C)\cdot P(S|\overline{R}\cap C)\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(0.05+0.10+0.15)=\frac{3}{40} \qquad (\overline{R}\text{ von A,B,C unabhängig}) \end{aligned}$$

weiter ist

$$\begin{aligned} P(S\cap\overline{R}\cap C) &= P(\overline{R}\cap C)\cdot P(S|\overline{R}\cap C)\\ &= P(\overline{R})\cdot P(C)\cdot P(S|\overline{R}\cap C)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{100} \qquad (\overline{R}\text{ ,C unabhängig}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(C|\overline{R}\cap S)=\frac{1}{2}$$

b) gesucht : $P(R|S)=\dfrac{P(R\cap S)}{P(S)}$

$$P(R\cap S)=P(R\cap A)\cdot P(S|R\cap A)+P(R\cap B)\cdot P(S|R\cap B)+P(R\cap C)\cdot P(S|R\cap C)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(0.06+0.15+0.12)=\frac{1}{12}\cdot\frac{33}{100}=\frac{11}{400}$$

$$P(S)=P(S\cap R)+P(S\cap\overline{R})=\frac{11}{400}+\frac{3}{40}=\frac{41}{400}$$

d.h. $P(R|S)=\dfrac{11}{41}\approx 0.2683$

Aufgabe 2.4:

Seien C = {„alle Kinder Jungen“} , $P(C)=\dfrac{1}{2^n}$

D = {„alle Kinder Mädchen“} , $P(D)=\dfrac{1}{2^n}$

E = {„genau eines der Kinder ist ein Mädchen“} , $P(E)=\dfrac{n}{2^n}$

$$A=\overline{C}\cap\overline{D}\ , \quad P(A)=1-P(C\cup D)=1-(P(C)+P(D))=1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$B=C\cup E\ , \quad P(B)=P(C)+P(E)=\frac{n+1}{2^n}$$

$$A\cap B=(\overline{C}\cap\overline{D})\cap(C\cup E)=\varnothing\cup(\overline{C}\cap\overline{D}\cap E)=E \qquad \text{wegen } E\subseteq\overline{C}\cap\overline{D}$$

A und B sind unabhängig gdw.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{gdw.}$$

$$P(E) = \frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{n+1}{2^n} \qquad \text{gdw.}$$

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{gdw.}$$

$$2^{n-1} = n+1$$

Dies gilt nur für n=3.