Georg Kuschk – Stochastik Serie 1

Aufgabe 1.1:

Sei A = {„die beiden stärksten Mannschaften spielen in verschiedenen Gruppen“}

Lösung : Urnenmodell, Ziehen ohne Zurücklegen, ungeordnete Stichprobe

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{14}{7}}{\binom{16}{8}} = \frac{2\cdot 3432}{12870} = \frac{8}{15} \approx 0.533$$

Aufgabe 1.2:

Alle Tripel aus den n Zahlen sind gleichwahrscheinlich.
Die drei gezogenen Zahlen seien der Größe nach mit a,b,c bezeichnet.
Jede Permutation dieser drei Zahlen ist gleichwahrscheinlich.
Es gibt folgende Möglichkeiten :

abc *
acb *
bac
bca *
cab
cba

Nur in den mit * markierten Fällen ist die erste Zahl kleiner als die zweite, somit
beträgt die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 1.3:

Sei $A_k =$ {„k-ter Brief im richtigen umschlag“} , k=1,..,n

B = {„kein Brief im richtigen Umschlag“} $= \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$

$\overline{B}$ = {„mindestens ein Brief im richtigen Umschlag“}

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1\le i_1\le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le i_3\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) \ldots + (-1)^{n-1}\cdot P(\bigcap_{i} A_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\cdot \underbrace{\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})}_{\binom{n}{k} Summanden} \right)$$

$$P(A_{i_1}) = \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

...

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \frac{(n-n)!}{n!}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{n-k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \cdot \frac{n!(n-k)!}{(n-k)!k!n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}$$ (erster Summand = 1) *

Wegen $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ und * folgt :

$$P(B) = 1 - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!} = -\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}(-1)^{-1}\frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}$$ q.e.d.

$$\lim_{n\to\infty} P(B) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

<u>Aufgabe 1.4:</u>

Seien x = Anzahl der entnommenen Teile bis erstmals ein Ausschussteil erhalten wird
A = {„unter den ersten k-1 entnommenen Teilen ist kein Ausschussteil“}
B = {„das k-te Teil ist Ausschuss“}

$$P(x = k) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{M}{N-k+2} \cdot \frac{\binom{M}{0}\binom{N-M}{k-1}}{\binom{N}{k-1}}$$

$$= \frac{\binom{N-k}{M-1}}{\binom{N}{M}}$$, k=1,...,N-M+1