Aufgabensammlung

zur Grundvorlesung Stochastik

PD. Dr. Wunderlich

Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg 2003

Lösungen

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik

1.1. a) $n = 5,\ k = 3:$ $\qquad n^k = 5^3 = 125$

b) $n = 5,\ k = 3:$ $\qquad n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

1.2. siehe Anlage, zwei Zeichen möglich : $\circ\ \bullet\ \Rightarrow$

$$n = 2,\ k = 6: \qquad n^k = 2^6 = 64 \qquad \text{(praktisch: 63)}$$

1.3. $n = 10,\ k = 3:$ $\qquad n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

1.4. a) $n = 49,\ k = 6:$ $\qquad \binom{n}{k} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$

b) $n = 10,\ k = 7:$ $\qquad n^k = 10^7$

c) $n = 3,\ k = 11:$ $\qquad n^k = 3^{11} = 177\,147$

1.5. a) $\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 1$

b) $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 20 \cdot 12\,341 = 246\,820$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k} = 260\,624$

1.6. $\qquad 23^2 \cdot 10^3 = 529\,000$

1.7. n Farben, $k = 2$ auswählen,
Anordnung spielt keine Rolle, Wiederholungen sind zugelassen:

$n = 4:$ $\qquad \binom{n+k-1}{k} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$

$n = 5:$ $\qquad \binom{n+k-1}{k} = \binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15$

zum Vergleich: Anordnung spielt Rolle $\Rightarrow n^k \ \Rightarrow\ n = 4$ reicht schon

1.8. a) $\displaystyle (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\, 1^{n-k} = 2^n$

b) $$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \underset{\text{vgl. a)}}{=} n \cdot 2^{n-1}$$

c) betrachten:

(i) $\displaystyle (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k\, x^{2n-k}$

(ii) $(1+x)^{2n} = (1+x)^n\,(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\, x^{n-k}\right) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\, x^{n-k}\right)$

Koeffizientenvergleich bei x^n:

(i) $\binom{2n}{n}$

(ii) $x^n = x^k\, x^{n-k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

2 Zufällige Ereignisse

2.1. a) $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$
$B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
$C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$
$D = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$
$E = C$

b) bei 8 Elementarereignissen : A, B
bei 4 Elementarereignissen : $\omega_i = \{i-1 \text{ Recorder defekt}\},\ i = 1, \ldots, 4$: A, B, D
bei 2 Elementarereignissen : $\omega_1 = \{\text{alle i.O.}\},\ \omega_2 = \overline{\omega_1}$: $B = \omega_1,\ C = E = \omega_2$

c) bei 8 Elementarereignissen : $N(C) = 7 \quad N(D) = 3 \quad N(\Omega) = 8$
bei 4 Elementarereignissen : $N(C) = 3 \quad N(D) = 1 \quad N(\Omega) = 4$
bei 2 Elementarereignissen : $N(C) = 1 \quad N(\Omega) = 2$
aber $A, D \subset \omega_2$!!, d.h. Ω ist zu grob

2.2. a) $+$: i. O. $\circ$: Nacharbeit $-$: Ausschuß

beachten Reihenfolge, geordnete Stichprobe, mit Wiederholungen
$\Rightarrow 3^2 = 9$ Elementarereignisse

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9
T_1	$+$	$+$	$+$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$-$	$-$	$-$
T_2	$+$	$\circ$	$-$	$+$	$\circ$	$-$	$+$	$\circ$	$-$

oder

ohne Beachtung der Reihenfolge, ungeordnete Stichprobe, mit Wiederholungen
$\Rightarrow \binom{3+2-1}{2} = 6$ Elementarereignisse

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
T_1	$+$	$+$	$+$	$\circ$	$\circ$	$-$
T_2	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$-$	$-$

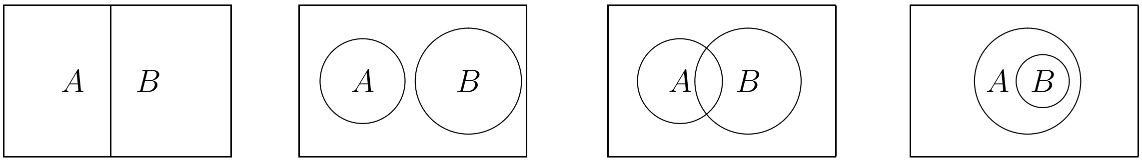
b) benutzen letztere Variante:

$A = \omega_1$
$B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
$C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \overline{\omega_6}$
$D = \{\omega_3, \omega_5, \omega_6\}$

2.3. (i) $\Omega = \{A, B, C\} \quad N(\Omega) = n = 3$ Elemente
$C = \{\text{eine Zahl, ein Wappen}\}$
$\Downarrow$
$\mathcal{A} = \{A, B, C, \emptyset, \Omega, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\} \quad |\mathcal{A}| = 2^n = 8$ Elemente

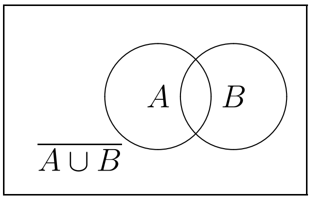
(ii) $\Omega = \{A, B, C, D\}$ $\quad |\Omega| = n = 4$ Elemente
$C = \{$ 1.Zahl, 2.Wappen$\} = (Z, W)$ $\qquad D = \{$ 1.Wappen, 2.Zahl$\} = (W, Z)$
$\Downarrow$
$\mathcal{A} = \{A, B, C, D, \emptyset, \Omega, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, A \cup B, A \cup C, A \cup D, B \cup C, B \cup D, C \cup D\}$
$|\mathcal{A}| = 2^n = 16$ Elemente

2.4. verschiedene Fälle sind möglich:



$2^2 = 4$ $\qquad 2^3 = 8$ $\qquad 2^4 = 16$ $\qquad 2^3 = 8$

2.5. Frage: $A \cap \overline{A \cup B} \neq \emptyset$?
Lösung: $A \cap \overline{A \cup B} = A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = \emptyset$ (De Morgansche Regel)



2.6. (i) wenn $M = N \Rightarrow M \cup N = N$
$\Downarrow$ wählen $M = A \cup B,\ N = \overline{A}$
$A \cup B = \overline{A} \Rightarrow A \cup B \cup \overline{A} = \Omega \cup B = \Omega$
$\Rightarrow \overline{A} = \Omega \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow B = \Omega$

(ii) wenn $M = N \Rightarrow M \cap N = N$
$\Downarrow$ wählen $M = A \cap B,\ N = \overline{A}$
$A \cap B = \overline{A} \Rightarrow A \cap B \cap \overline{A} = \emptyset \cap B = \emptyset$
$\Rightarrow \overline{A} = \emptyset \Rightarrow A = \Omega \Rightarrow B = \emptyset$

(iii) $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$, denn
$A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) = A \cap B \;\Leftrightarrow\; A \backslash B = B \backslash A = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

2.7. Diese beiden Identitäten werden die verallgemeinerten De Morganschen Regeln genannt

mengentheoretisch:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \overline{\{\omega \in \Omega : \exists\, k \text{ mit } \omega \in A_k\}} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A_k\,,\ \forall\, k\} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \overline{\{\omega \in \Omega : \omega \in A_k\,,\ \forall k\}} = \{\omega \in \Omega : \exists\, k \text{ mit } \omega \notin A_k\} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

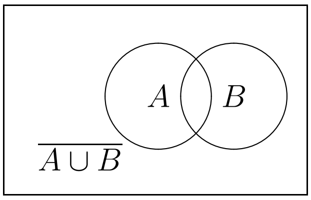
Interpretation als Ereignisse:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{ \text{ mindestens eines der } A_k \text{ tritt ein } \}$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \{ \text{ keines der } A_k \text{ tritt ein } \} = \{ \text{ alle } \overline{A_k} \text{ treten ein } \} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

$$\begin{aligned} \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} &= \overline{\{ \text{ alle } A_k \text{ treten ein } \}} = \{ \text{ mindestens eines der } A_k \text{ tritt nicht ein } \} \\ &= \{ \text{ mind. ein } \overline{A_k} \text{ tritt ein} \} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k} \end{aligned}$$

2.8. Geg.: $\mathbf{P}(A) = 0.25$, $\mathbf{P}(B) = 0.45$, $\mathbf{P}(A \cup B) = 0.5$



$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \Longrightarrow \mathbf{P}(A \cap B) = 0.25 + 0.45 - 0.5 = 0.2$$

(i) $\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A \cap (\Omega \backslash B)) = \mathbf{P}((A \cap \Omega) \backslash (A \cap B)) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0.05$

oder

$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}((A \cup B) \backslash B) = \mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(B) = 0.5 - 0.45 = 0.05$

(ii) $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 0.5$

(iii) $$\begin{aligned} \mathbf{P}[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] &\underset{\text{unvereinbar}}{=} \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) \\ &\underset{\text{vgl. (i)}}{=} \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B) = 0.3 \end{aligned}$$

3 Klassische Methode

3.1. $A = \{$ Würfel gefärbt$\}$ $\overline{A} = \{$ Würfel nicht gefärbt$\}$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{600 - 12 \cdot 10 + 8 \cdot 1}{1000} = \frac{488}{1000} = 0.488$$

oder einfacher:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{8^3}{1000} = 0.488$$

3.2. $A_k = \{$ Augensumme ist k $\}$ $k = 9, 10,$
betrachten gleich wahrscheinliche Versuchsausgänge !

2 Würfel:

$6^2 = 36$ gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge
$\{(1,1),(1,2)...(1,6),(2,6),...,(6,6)\}$
$\Rightarrow A_9 = \{(4,5),(5,4),(6,3)(3,6)\}$
$\Rightarrow A_{10} = \{(4,6),(6,4),(5,5)\}$

$$\mathbf{P}(A_9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} > \frac{1}{12} = \frac{3}{36} = \mathbf{P}(A_{10})$$

3 Würfel:

$6^3 = 216$ gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge

$$\mathbf{P}(A_9) = \frac{25}{216} < \frac{27}{216} = \mathbf{P}(A_{10})$$

	k=9		k=10	
1.Würfel	2.+3.Würfel	Möglichkeiten	2.+3.Würfel	Möglichkeiten
1	8	5	9	4
2	7	6	8	5
3	6	5	7	6
4	5	4	6	5
5	4	3	5	4
6	3	2	4	3
		25		27

3.3. a) $A = \{$ mind. eine sechs bei vier Würfen $\}$
$\overline{A} = \{$ keine sechs bei vier Würfen $\}$

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - 0.4823 = 0.5177$$

(6^4 gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge, 5^4 günstig für $\overline{A}$, d.h. keine '6', nur '1',...,'5')

b) $A = \{$ mind. ein (6,6) bei 24 Würfen zweier Würfel$\}$
$\overline{A} = \{$ kein (6,6) bei 24 Würfen zweier Würfel$\}$
$B_k = \{$ (6,6) beim k-ten Wurf $\}$ $\quad k = 1, ..., 24$
$\overline{B_k} = \{$ nicht (6,6) beim k-ten Wurf $\}$ $\quad k = 1, ..., 24$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad \overline{A} &= \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{24}} \\
\mathbf{P}(A) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{24}}) \\
&= 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \quad \text{(vgl. 24-facher Wurf eines 36-flächigen “Würfels”)} \\
&= 1 - 0.5086 = 0.4914
\end{aligned}$$

(i) Rechenregeln für unabhängige Ereignisse liefern direkt:

$$\mathbf{P}(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{24}}) = \prod_{k=1}^{24} \mathbf{P}(\overline{B_k}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

(ii) “ Proportionalität “ gilt nicht :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{ \text{ (6,6) bei 1 Wurf von 2 Würfeln } \}) &= \frac{1}{6}\, \mathbf{P}(\{ \text{ '6' bei 1 Wurf eines Würfels } \}) \\
&\not\Downarrow \\
\mathbf{P}(\{ \text{ (6,6) bei } 6n \text{ Würfen zweier Würfel } \}) &= \mathbf{P}(\{ \text{ '6' bei } n \text{ Würfen eines Würfels } \})
\end{aligned}$$

hier ist $n = 4$

3.4. Spiel ist mit Sicherheit nach 3 Würfen entschieden
betrachten 8 gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge:
(z,z,z), (z,z,w),..., (w,w,w)
A gewinnt in 7 Fällen
B gewinnt in 1 Fall (w,w,w)
$\Longrightarrow$ Aufteilung 7:1
(falsche Lösungen: 2:1 zwei Spiele nicht gewonnen, 5:3 ...)

3.5. $A_k = \{$ k-tes Kind bekommt eigenes Päckchen $\}$, $\quad k = 1..12$

$B = \{$ kein Kind bekommt eigenes Päckchen $\} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_{12}}$
(A_k sind nicht unabhängig)

$\overline{B} = \{$ mind. ein Kind bekommt eigenes Päckchen $\} = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{12}$
(A_k nicht einander ausschließend)

Ges.: $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{12})$

nutzen verallgemeinerten Additionssatz (Satz von Poincaré):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \\
\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2 \cup A_3) - \mathbf{P}(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) \\
&= \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) \\
&\quad -\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbf{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \sum_{1 \le i_1 \le 3} \mathbf{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 3} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\
\mathbf{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{1 \le i_1 \le n} \mathbf{P}(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \qquad \text{mit } S_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})
\end{aligned}
$$

Anzahl der Summanden in S_k : $\binom{n}{k}$ (vgl. ungeordnete Stichprobe, keine Wiederholungen)

hier: $n = 12$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{i_1}) &= \frac{11!}{12!} && \Rightarrow S_1 = 12 \cdot \frac{11!}{12!} = 1 \\
\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) &= \frac{10!}{12!} && \Rightarrow S_2 = \binom{12}{2} \cdot \frac{10!}{12!} = \frac{1}{2!} \\
&\vdots \\
\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_k}) &= \frac{(12-k)!}{12!} && \Rightarrow S_k = \binom{12}{k} \cdot \frac{(12-k)!}{12!} \underset{\text{vgl. } (*)}{=} \frac{1}{k!} \\
&\vdots \\
\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{12}) &= \frac{0!}{12!} && \Rightarrow S_{12} = \binom{12}{12} \cdot \frac{0!}{12!} = \frac{1}{12!} \\
&\Downarrow \\
\mathbf{P}(B) &= 1 - \sum_{k=1}^{12} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = 0.3679 \underset{\text{vgl. } (**)}{\approx} \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

(*)

$$
\binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}
$$

(**)

$$
\frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}
$$

4 Diskrete Verteilungen

4.1. Geg.: 2 Versuchsausgänge : Junge: $b_1 = 1$ mit $p = 0.5$ (0.515)
Mädchen: $b_2 = 0$ mit $1 - p = 0.5$ (0.485)

n "Versuche" (= Kinder): $a_1, a_2 \ldots a_n, \quad a_i \epsilon \{0, 1\}$

$$A_k = \{\omega : \quad \omega = (a_1, \ldots, a_n);\ \sum_{i=1}^{n} a_i = k\} \quad = \quad \{ \text{ genau } k \text{ Jungen } \}$$

$$\mathbf{P}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E = \{\omega : \quad \omega = (a_1, \ldots, a_n);\ \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 1\} \quad = \quad \{ \text{ mindestens 1 Junge } \}$$

$$\mathbf{P}(E) \geq 0.9 \qquad (0.99)$$

Ges.: $n = ?$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(E) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbf{P}(A_0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - (1-p)^n \ \geq \ 0.9 \\
&\Updownarrow \\
(1-p)^n = 0.5^n &\leq 0.1 \\
&\Updownarrow \\
n &\geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.5} = 3.322 \Longrightarrow n = 4
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(E) \geq 0.99 \quad \Rightarrow \quad n \geq 6.64 \Longrightarrow n = 7$$

4.2. $b_1 = 1$ rote Kugel gezogen ,
$b_2 = 0$ weiße (d.h. keine rote) Kugel gezogen
$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, a_3)\}$
$A_k = \{\omega : a_1 + a_2 + a_3 = k\} \qquad k = 0, 1, 2, 3$

(a) mit Zurücklegen: Binomialverteilung $n = 3, p = 2/7$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
\mathbf{P}(A_1) &= \binom{n}{1} p (1-p)^2 \ = \ 3 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7}^2 \ = \ 0.4373
\end{aligned}$$

(b) ohne Zurücklegen: Hypergeometrische Verteilung

$M = 7 \qquad M_1 = 2 \qquad M_2 = M - M_1 = 5$

$n = 3 \qquad n_1 = k = 1 \quad n_2 = n - k = 2$

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{\binom{M_1}{k}\binom{M-M_1}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{7} = 0.5714$$

4.3. Hypergeometrische Verteilung

$M = 20$ Fragen , $M_1 = 18$ beantwortbar , $M_2 = M - M_1 = 2$ nicht beantwortbar
$n = 4$ Fragen gestellt , $k = 4$ beantwortet , $n - k = 0$ nicht beantwortet

$A_4 = \{$ Note 1 wird erteilt $\}$

$$\mathbf{P}(A_4) = \frac{\binom{M_1}{k}\binom{M-M_1}{n-k}}{\binom{M}{n}} = \frac{\binom{18}{4}\binom{2}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{12}{19} = 0.6316$$

4.4. Multinomialverteilung (Polynomialverteilung)

b_1 - Diesel $\quad b_2$ - Kat. $\quad b_3$ - ohne Kat.
$p_1 = 0.25 \quad p_2 = 0.5 \quad p_3 = 0.25$
$n_1 = 2 \quad n_2 = 4 \quad n_3 = 2 \qquad n = n_1 + n_2 + n_3 = 8$

$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \ldots, a_8), \quad a_i \,\epsilon\, \{b_1, b_2, b_3\}\}$

$$\mathbf{P}(A_{n_1,n_2,n_3}) = \frac{n!}{n_1!\; n_2!\; n_3!} \cdot p_1^{n_1}\; p_2^{n_2}\; p_3^{n_3} = \frac{8!}{2!\; 4!\; 2!} \cdot 0.25^2\; 0.5^4\; 0.25^2 = 0.1025$$

4.5. Hypergeometrische Verteilung

$M = 1000$ Teile, *davon* $\quad M_1$ defekt $\quad M_2 = M - M_1$ in Ordnung
$n = 50$ geprüft, davon $\quad k$ defekt $\quad n - k$ in Ordnung

$A_k = \{k$ defekte Teile $\} \quad k = 0, \ldots, \min(M_1, n)$
$\{$'Annahme'$\} = A_0 \cup A_1$

(a) Ges.: $\mathbf{P}(\{$'Annahme'$\})$ für $M_1 = 40$ (= irrtümliche Annahme)
Näherung mit Binomialverteilung

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_k) &= \frac{\binom{M_1}{k}\binom{M-M_1}{n-k}}{\binom{M}{n}} = \frac{\binom{40}{k}\binom{960}{n-k}}{\binom{1000}{50}} \quad \text{(aufwendig !)} \\ &\underset{M\to\infty\ \frac{M_1}{M}\to p}{\longrightarrow} \binom{n}{k}\left(\frac{M_1}{M}\right)^k \left(1 - \frac{M_1}{M}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\left(\{\text{'Annahme'}\}\right) \approx \underbrace{\binom{50}{0}p^0(1-p)^{50}}_{\mathbf{P}(A_0)} + \underbrace{\binom{50}{1}p^1(1-p)^{49}}_{\mathbf{P}(A_1)} = 0.1299 + 0.2706 = 0.4005$$

(b) Ges.: $\mathbf{P}(\{\text{'Ablehnung'}\})$ für $M_1 = 10$ (= irrtümliche Ablehnung), $p = \frac{M_1}{M} = 0.01$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\text{ Ablehnung }\}) &= 1 - [\mathbf{P}(A_0) + \mathbf{P}(A_1)] \\ &\approx 1 - [0.99^{50} + 50 \cdot 0.01 \cdot 0.99^{49}] = 1 - 0.9106 = 0.0894 \end{aligned}$$

beide Irrtumswahrscheinlichkeiten unbefriedigend $\Rightarrow$

- größere Stichprobe
- Annahme nur, wenn kein Teil defekt
  $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit für irrtümliche Annahme sinkt,
  aber Wahrscheinlichkeit für irrtümliche Ablehnung steigt !

4.6. M Fische, $M_1 = 1000$ markiert, $M_2 = M - M_1$ nicht markiert
$n = 150$ gefangen, $k = 10$ markiert, $n - k = 140$ nicht markiert
$A_k = \{k$ Fische markiert $\}$

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{\binom{M_1}{k}\binom{M-M_1}{n-k}}{\binom{M}{n}} \to \max_M$$

Zähler und Nenner sind Polynome k-ten Grades in M !!
$\Rightarrow$ Binomialapproximation

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \to \quad \max_p \qquad\qquad \text{mit } p = \frac{M_1}{M}$$

$$\Leftrightarrow f(p) := \ln\binom{n}{k} + k\ln p + (n-k)\ln(1-p) \quad \to \quad \max_p$$

$$\text{aus } 0 = f'(p^*) = \frac{k}{p^*} - \frac{n-k}{1-p^*} \qquad \text{folgt } k(1-p^*) = p^*(n-k)$$

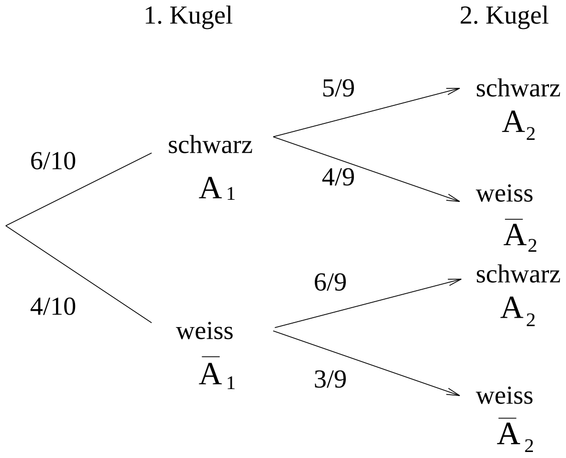
$$\Rightarrow p^* = \frac{k}{n} = \frac{M_1}{M^*}$$

$$\Rightarrow M^* = \frac{M_1}{p^*} = \frac{M_1}{k} \cdot n = 1000 \cdot \frac{150}{10} = 15000$$

4.7.
- Binomialverteilung $\mathrm{B(n, 0.5)}$ $\quad \sum \mathrm{p_k} = 1$
- Binomialverteilung $\mathrm{B(n, 0.5)}$ $\quad \mathbf{E}\xi = \mathrm{np} = \frac{\mathrm{n}}{2}$
- Hypergeometrische Vert. $M = 2n, M_1 = M_2 = n$ $\quad \sum p_k = 1$

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

5.1. $A_i = \{\ i\text{-te Kugel ist schwarz}\ \} \quad i = 1, 2$



(a) $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2|\overline{A_1})\cdot\mathbf{P}(\overline{A_1}) = \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10} + \frac{6}{9}\cdot\frac{4}{10} = \frac{6}{10}$

$(= \mathbf{P}(A_1)$ gilt für beliebige Konstellationen vgl. Vorlesung)

(b) $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_2|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_1) \ = \ \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10} \ = \ \frac{1}{3}$

klassisch: $\quad \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \dfrac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{6\cdot 5}{10\cdot 9} = \dfrac{1}{3}$

5.2. $A_i = \{\text{ Buch im } i\text{-ten Regal }\}, \quad \mathbf{P}(A_i) = \frac{p}{8}, \quad i = 1, \ldots, 8$

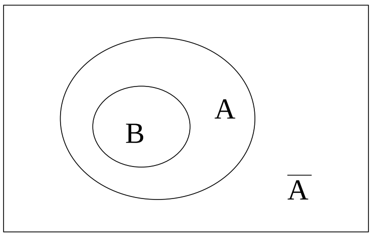
$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_8) \\ 1-p &= \mathbf{P}(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_8}) = \mathbf{P}(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_8}) \end{aligned}$$

Ges.: $\mathbf{P}(A_8|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_7}) = \quad ?$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_8|\underbrace{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_7}}_{B}) \quad &= \quad \frac{\mathbf{P}(A_8 \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_8)}{\mathbf{P}(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_7})} \quad (\text{da } A_8 \subset B) \\ &= \quad \frac{\mathbf{P}(A_8)}{1 - (\mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_7))} \quad (A_1, \ldots, A_8 \ \text{ unvereinbar }) \\ &= \quad \frac{\frac{p}{8}}{1 - \frac{7}{8}p} \ = \ \frac{p}{8 - 7p} \ > \ \frac{p}{8} \ \Rightarrow \ \mathbf{P}(A_8|B) \ > \ \mathbf{P}(A_8) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vorinformation steigert Wkt.

5.3.



$$B \subset A: \quad \mathbf{P}(B|A) = p < 1$$

$$\mathbf{P}(B|\overline{A}) = 0$$

$$\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A}) = 1 \quad \text{da } \overline{A} \subset \overline{B}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(B|\overline{A}) = p < 1 \qquad \mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A}) = 1 + p > 1$$

(aber stets gilt: $\underbrace{\mathbf{P}(B|A)}_{p} + \underbrace{\mathbf{P}(\overline{B}|A)}_{1-p} = 1$)

oder A_1 undA_2 aus Aufgabe 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_2|A_1) + \mathbf{P}(A_2|\overline{A_1}) &= \frac{5}{9} + \frac{6}{9} = \frac{11}{9} \neq 1 \\ \mathbf{P}(A_2|A_1) + \mathbf{P}(\overline{A_2}|\overline{A_1}) &= \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \neq 1 \end{aligned}$$

5.4. $A = \{\text{im Auto}\}$
$\overline{A} = \{\text{in der Wohnung}\}$
$B = \{\text{Lebensdauer} \geq 500\text{h}\}$

Geg.: $\mathbf{P}(A) = 0.3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 0.7$
$\mathbf{P}(B|A) = 0.75 \qquad \mathbf{P}(B|\overline{A}) = 0.95$

Ges.: $\mathbf{P}(B) = ?$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit mit $\mathcal{D} = \{A, \overline{A}\} \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(B|A) \cdot \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}) \\ &= 0.75 \cdot 0.3 + 0.95 \cdot 0.7 = 0.89 \end{aligned}$$

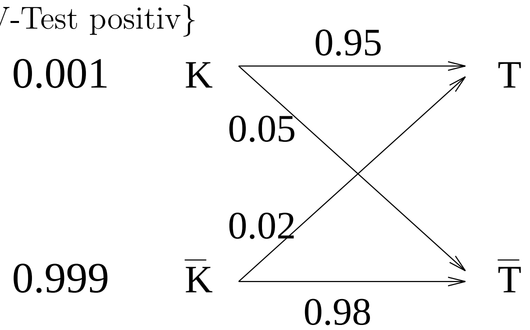
5.5. $K = \{\text{Patient HIV-infiziert}\} \quad T = \{\text{HIV-Test positiv}\}$

Geg.: Sensitivität: $\mathbf{P}(T|K) = 0.95$

Spezivität: $\mathbf{P}(\overline{T}|\overline{K}) = 0.98$

Prävalenz: $\mathbf{P}(K) = 0.001$

Ges.: $\mathbf{P}(\overline{K}|T)$

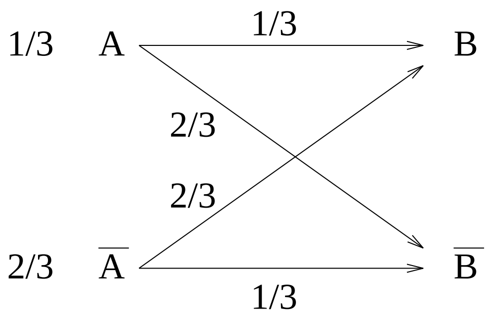


$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\overline{K}|T) &= \frac{\mathbf{P}(\overline{K}\cap T)}{\mathbf{P}(T)} = \frac{\mathbf{P}(T|\overline{K})\cdot\mathbf{P}(\overline{K})}{\mathbf{P}(T|K)\cdot\mathbf{P}(K)+\mathbf{P}(T|\overline{K})\cdot\mathbf{P}(\overline{K})} \\
&= \frac{0.02\cdot 0.999}{0.95\cdot 0.001+0.02\cdot 0.999} = 0.9546 \qquad \text{(recht groß)}
\end{aligned}
$$

zum Vergleich: $\mathbf{P}(K|T) = 0.0454$
$\mathbf{P}(K|\overline{T}) = 0.000051$

Test als Sieb: aus 0.1% werden 4.5%
Verbesserung "positiv getestete " werden noch einmal geprüft

5.6. $A = \{\text{Peter sagt Wahrheit}\}$
$B = \{\text{Paul sagt, Peter hat recht }\}$
$\overline{B} = \{\text{Paul sagt, Peter lügt}\}$



Geg.: $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{2}{3}$

$\mathbf{P}(B|A) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbf{P}(\overline{B}|A) = \frac{2}{3}$

$\mathbf{P}(B|\overline{A}) = \frac{2}{3}$ $\quad \mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1}{3}$

Ges.: $\mathbf{P}(A|B) = ?$

$$
\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A)\cdot\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B|A)\cdot\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B|\overline{A})\cdot\mathbf{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}
$$

(aus unbedingter Wkt. $\frac{1}{3}$ wird bedingte Wkt. $\frac{1}{5}$ durch eingehende Zusatzinformation)

5.7. [1] $A_i = \{\text{Auto hinter Tür } i\}$ $\quad i = 1,2,3$
$B_i = \{\text{Moderator öffnet Tür } i\}$ $\quad i = 1,2,3$

Geg.: zu Beginn: $\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{3}$
Tür 2 geöffnet: B_3 eingetreten (Vorinformation)

[1] Lösung überarbeiten, vgl. auch Eröffnungsvortrag Lehrerfortbildung

Ges.: $\mathbf{P}(A_1|B_3) \underset{<}{>} \mathbf{P}(A_2|B_3)$

$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{3}$
$\mathbf{P}(B_3|A_1)) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(B_3|A_2)) = 1, \quad \mathbf{P}(B_3|A_3)) = 0,$
Satz von Bayes mit $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, A_3\} \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_1|B_3) &= \frac{\mathbf{P}(B_3|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(B_3)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\
\text{wegen } \mathbf{P}(B_3) &= \mathbf{P}(B_3|A_1)\cdot\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B_3|A_2)\cdot\mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(B_3|A_3)\cdot\mathbf{P}(A_3) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\
\mathbf{P}(A_2|B_3) &= \frac{\mathbf{P}(B_3|A_2)\cdot\mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(B_3)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ sollten Tür 3 wählen

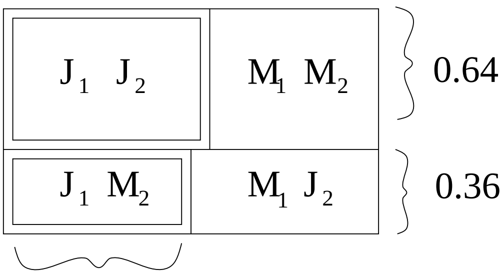
vgl. auch: Tür 1 - Wkt. $\frac{1}{3}$; Tür 2+3 - Wkt. $\frac{2}{3}$
100 Türen, 98 geöffnet
Buch Ziegenproblem

5.8. $J_i = \{i\text{-tes Kind ist ein Junge}\} \qquad i = 1, 2$
$M_i = \{i\text{-tes Kind ist ein Mädchen}\} \qquad i = 1, 2$
$J = \{\text{(irgendein) Kind ist ein Junge}\}$
$M = \{\text{(irgendein) Kind ist ein Mädchen}\}$

Geg.: $\mathbf{P}('J_1J_2' \cup ' M_1M_2') = 0.64$ Ges.: $\mathbf{P}(J_2|J_1) =?$
$\mathbf{P}(J) = 0.51$
$\mathbf{P}('J_1M_2') = \mathbf{P}('M_1J_2')$

$$\mathbf{P}(J_2|J_1) = \frac{\mathbf{P}('J_1J_2')}{\mathbf{P}(J_1)} = \frac{\mathbf{P}('J_1J_2')}{\mathbf{P}(J)} = \frac{?}{0.51} \underset{NR}{=} \frac{0.33}{0.51} = 0.647$$

NR.: $\mathbf{P}(J_1J_2) =?$
(betrachten dabei vollständiges Ereignissystem $\Omega = \{'J_1J_2',' M_1J_2',' J_1M_2',' M_1M_2'\}$)



P(J 1) =P (J) =0.51

$$
\begin{aligned}
J_2 &= {}'J_1J_2' \cup' M_1J_2' \\
\mathbf{P}(J_2) &= \mathbf{P}('J_1J_2') + \mathbf{P}('M_1J_2') \\
\mathbf{P}('J_1J_2') &= \mathbf{P}(J) - \mathbf{P}('M_1J_2') \\
&= \mathbf{P}(J) - \frac{(1 - \mathbf{P}('M_1M_2' \cup' J_1J_2'))}{2} \\
&= 0.51 - \frac{(1 - 0.64)}{2} = 0.33
\end{aligned}
$$

6 Unabhängigkeit

6.1. Vor.: $\mathbf{P}(A) = 0$ oder $\mathbf{P}(A) = 1$
Beh.: $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$

(i) $\mathbf{P}(A) = 0$: $\quad \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(A)$ (da $A \cap B \subseteq A$) $\Rightarrow \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 0$
$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 0 = 0 \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$

(ii) $\mathbf{P}(A) = 1$: $\quad$ Additionssatz: $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B)$
$\mathbf{P}(A \cup B) \geq \mathbf{P}(A) = 1$ (da $A \subseteq A \cup B$))
$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 1 + \mathbf{P}(B) - 1 = 1 \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$

oder betrachten $\overline{A}$ mit $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0$
(i) $\Rightarrow \quad \overline{A}$, B unabhängig $\Rightarrow \quad A$, B unabhängig

6.2. Vor.: $\mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A) = (\mathbf{P}(A))^2$
Beh.: $\mathbf{P}(A) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$$\text{für } x \geq 0 \text{ gilt } x = x^2 \text{ nur für } x = 0, 1$$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap A) = (\mathbf{P}(A))^2 \underset{x=\mathrm{P}(A)}{\Longrightarrow} \text{Beh.}$$

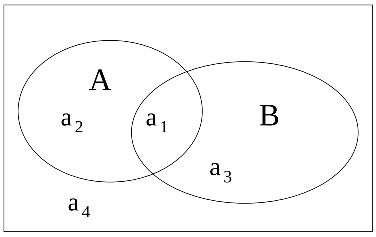
(vgl. auch Aufgabe 6.1 mit $B = A$)

6.3. Vor: $\quad A_1, \ldots, A_n$ unabhängig

zu zeigen: $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_i}\right)$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\overline{A_i}\right)$$

6.4. A, B unabhängig $\Longleftrightarrow \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$



$$
\begin{aligned}
A &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \\
\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(A \cap B) - 0 \\
&= \frac{N(A \cap \overline{B})}{N(\Omega)} + \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \\
&= \frac{a_2}{\sum_{i=1}^{4} a_i} + \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i} = \frac{a_2 + a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \\
\mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbf{P}(A \cap B) - 0 \\
&= \frac{N(\overline{A} \cap B)}{N(\Omega)} + \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \\
&= \frac{a_3}{\sum_{i=1}^{4} a_i} + \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i} = \frac{a_3 + a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i}
$$

es muß gelten:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cap B) &= \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \\
\frac{a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i} &= \frac{a_2 + a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i} \cdot \frac{a_3 + a_1}{\sum_{i=1}^{4} a_i} \\
\Longleftrightarrow \quad a_1(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) &= (a_2 + a_1)(a_3 + a_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Longleftrightarrow \quad \boxed{a_1 a_4 = a_2 a_3}
$$

6.5. $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_i \epsilon \{w, z\},\ i = 1, 2, 3\}, \quad N(\Omega) = 8$

$\Downarrow$

$A = \{(w, w, w), (z, w, w), (w, z, z), (z, z, z)\} \quad \Rightarrow \mathbf{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$B = \{(w, w, w), (w, z, w), (z, w, z), (z, z, z)\} \quad \Rightarrow \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$

$C = \{(w, w, w), (w, w, z), (z, z, w), (z, z, z)\} \quad \Rightarrow \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(w, w, w), (z, z, z)\} = A \cap B \cap C$

$$\begin{aligned} \text{es gilt: } \mathbf{P}(A \cap B) &= \mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{ paarweise unabhängig} \\ \mathbf{P}(A \cap B \cap C) &= \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C) \quad \Rightarrow \text{ nicht vollständig unabhängig} \end{aligned}$$

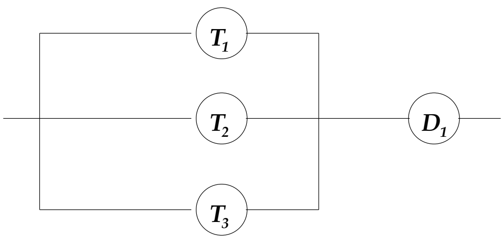
6.6. $D_i = \{\text{Druckmeßfühler } i \text{ ausgefallen}\} \quad \mathbf{P}(D_i) = 0.1,\ i = 1, 2, 3$

$T_j = \{\text{Temperaturmeßfühler } j \text{ ausgefallen}\} \quad \mathbf{P}(T_j) = 0.3,\ j = 1, 2, 3$

$A = \{\text{beide Messungen möglich}\}$

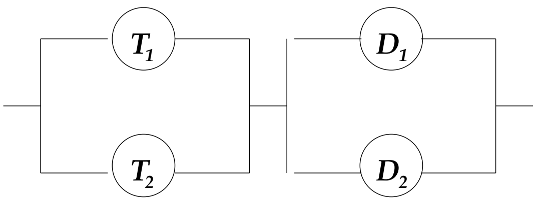
Ges.: $\mathbf{P}(A) \to \max$ bzw. $\mathbf{P}(\overline{A}) \to \min$

(a)



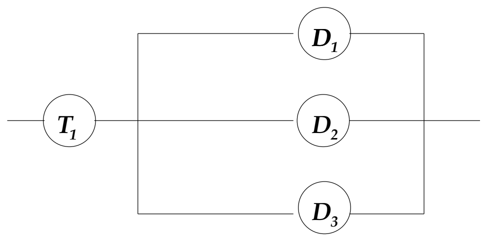
$$\begin{aligned} \overline{A} &= (T_1 \cap T_2 \cap T_3) \cup D_1 \\ \mathbf{P}(\overline{A}) &= \mathbf{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3) + \mathbf{P}(D_1) - \mathbf{P}((T_1 \cap T_2 \cap T_3) \cap D_1) \\ &= 0.3^3 + 0.1 - 0.3^3 \cdot 0.1 = 0.1243 \end{aligned}$$

(b)



$$\begin{aligned} \overline{A} &= (T_1 \cap T_2) \cup (D_1 \cap D_2) = \overline{(\overline{T_1 \cap T_2}) \cap (\overline{D_1 \cap D_2})} \\ \mathbf{P}(\overline{A}) &= \ldots = 0.0991 \\ & \text{beste Variante} \end{aligned}$$

(c)



$$\begin{aligned} \overline{A} &= T_1 \cup (D_1 \cap D_2 \cap D_3) \\ \mathbf{P}(\overline{A}) &= \ldots = 0.3007 \end{aligned}$$

6.7. Geg.:
$A_i = \{\text{A trifft im } (2i-1)\text{-ten Versuch}\} \quad i = 1, 2, \ldots$
$B_i = \{\text{B trifft im } (2i)\text{-ten Versuch}\} \quad i = 1, 2, \ldots$
$\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(B_i) = \frac{1}{2}$
$L_A = \{\text{A überlebt}\}$
$L_B = \{\text{B überlebt}\}$
$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ unabhängig in der Gesamtheit

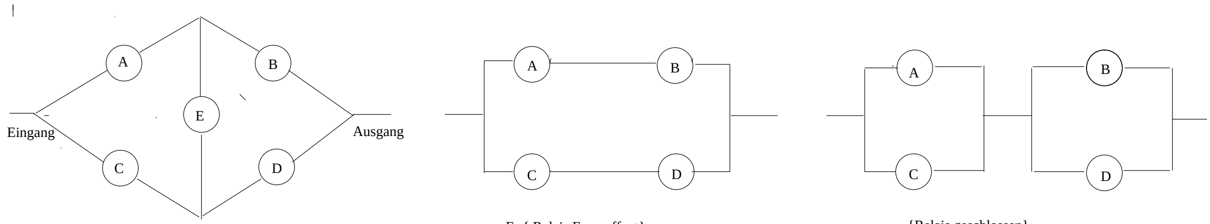
$$\begin{aligned} L_A &= A_1 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1}) \cap A_2 \cup (\overline{A_1} \cap \overline{B_1}) \cap (\overline{A_2} \cap \overline{B_2}) \cap A_3 \cdots \\ \mathbf{P}(L_A) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdots \qquad \text{(Unabhängigkeit)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \\ L_B &= \overline{L_A} \\ \mathbf{P}(L_B) &= 1 - \mathbf{P}(L_A) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.Weg:
nach erstem Schuß von A (daneben) ist B in der gleichen Situation wie A vor erstem Schuß. Er kommt hierhin nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(L_B) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}(L_A) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(L_A) + \mathbf{P}(L_B) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(L_B) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(L_A) = \frac{2}{3}$$

6.8. Geg.: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(E) = p = 1 - q$
$E = \{\text{Relais geöffnet}\}$
$\overline{E} = \{\text{Relais E geschlossen}\}$



E={ Relais E geoeffnet} {Relais geschlossen}

a) $F = \{\text{Signal erreicht Ausgang}\}$

zerlegen F:
$$\begin{aligned} F &= (F \cap E) \cup (F \cap \overline{E}) \\ \mathbf{P}(F) &= \mathbf{P}(F \cap E) + \mathbf{P}(F \cap \overline{E}) \\ &= \mathbf{P}(F|E) \cdot \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(F|\overline{E}) \cdot \mathbf{P}(\overline{E}) \\ \mathbf{P}(F) &\underset{\text{NR}}{=} (2q^2 - q^4) \cdot (1 - q) + (2q - q^2)^2 \cdot q \end{aligned}$$

Nebenrechnung:
(i)

$$\mathbf{P}(F|E) = \mathbf{P}((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{C} \cap \overline{D})) = \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{C} \cap \overline{D}) - \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C} \cap \overline{D}) = 2q^2 - q^4$$

(ii)

$$\mathbf{P}(F|\overline{E}) = \mathbf{P}((\overline{A} \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{D})) = \mathbf{P}(\overline{A} \cup \overline{C}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B} \cup \overline{D}) = (q + q - q^2)^2 = (2q - q^2)^2$$

b)

$$\mathbf{P}(E|F) = \frac{\mathbf{P}(F|E) \cdot \mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}(F)} = \frac{(2q^2 - q^4) \cdot (1 - q)}{(2q^2 - q^4) \cdot (1 - q) + (2q - q^2)^2 \cdot q}$$

7 Diskrete Zufallsgrößen

7.1. ξ – Anzahl der Fahrten bis zur 1. Kontrolle
$A_k = \{\text{Kontrolle bei } k\text{-ter Fahrt}\}$ $\quad A_k$ unabhängig (?? diskutieren)
$\mathbf{P}(A_k) = p = 0.05$

$$
\begin{aligned}
\{\xi = k\} &= \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k \\
\mathbf{P}(\xi = k) &= (1-p)^{k-1} \cdot p \;=\; q^{k-1} \cdot p, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad q = 1-p \\
& \quad \text{(geometrische Verteilung)} \\
\mathbf{E}\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}(\xi = k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p \;=\; p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} q^k \right) \\
&= p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \;=\; p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right) \;=\; p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \;=\; \frac{p}{p^2} \;=\; \frac{1}{p} \\
\mathbf{D}\xi &= \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 \\
\mathbf{E}\xi^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} \cdot p \;=\; p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \cdot (k\,(k-1) + k) \\
&= p \cdot \left[q \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot q^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \right] \\
&= p \cdot \left[q \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2} \sum_{k=1}^{\infty} q^k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right] \\
&= p \cdot \left[q \cdot \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} \right] \;=\; \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} \\
\Rightarrow \mathbf{D}\xi &= \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 \;=\; \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} \right)^2 \;=\; \frac{(1-p)}{p^2}
\end{aligned}
$$

Für $p = 0.05$ ergibt sich $\mathbf{E}\xi = 20$ und $\mathbf{D}\xi = \frac{1-0.05}{0.05^2} \;=\; 380.$

7.2. (a) ξ_B- geometrisch verteilt, $\mathbf{P}(\xi_B = k) = (1-p)^{k-1} p \quad k = 1, 2, \ldots, p = \dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \mathbf{E}\xi_B = \dfrac{1}{p} = 10$ (entspricht max ξ_A !!)

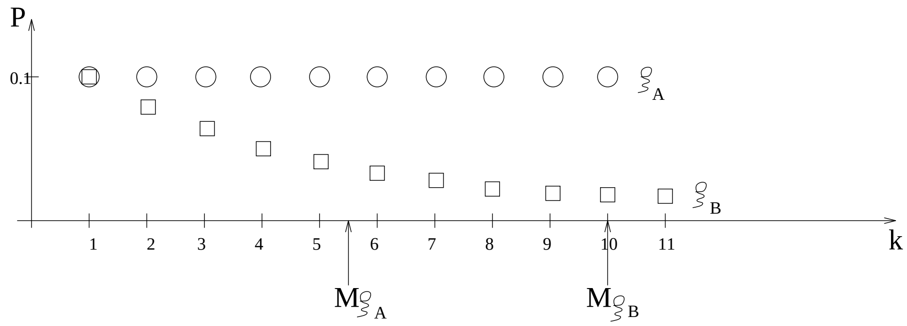
$\xi_A \in \{1, \ldots, 10\} \qquad C_k = \{\text{finden Schlüssel beim } k\text{-ten Versuch}\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\xi_A = 1) &= \mathbf{P}(C_1) = \frac{1}{10} \\
\mathbf{P}(\xi_A = 2) &= \mathbf{P}(\overline{C_1} \cap C_2) = \mathbf{P}(C_2 | \overline{C_1}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C_1}) = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \\
\mathbf{P}(\xi_A = 3) &= \mathbf{P}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3) = \mathbf{P}(C_3 | \overline{C_1} \cap \overline{C_2}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) \\
&= \mathbf{P}(C_3 | \overline{C_1} \cap \overline{C_2}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C_2} | \overline{C_1}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C_1}) \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\xi_A = k) &= \mathbf{P}(\overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{k-1}} \cap C_k) \\
&= \mathbf{P}(C_k | \overline{C_1} \cap \ldots \overline{C_{k-1}}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C_{k-1}} | \overline{C_{k-2}} \cap \ldots \overline{C_1}) \cdot \cdots \cdot \mathbf{P}(\overline{C_2} | \overline{C_1}) \cdot \mathbf{P}(\overline{C_1}) \\
&= \frac{1}{10-(k-1)} \cdot \frac{10-(k-1)}{10-(k-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \mathbf{P}(\xi_A = k) = \frac{1}{10} \quad k = 1, \ldots, 10
$$

$$
\Longrightarrow \mathbf{E}\xi_A = 5.5
$$



(b) $B = \{\text{betrunken}\}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$

$A = \{8 \text{ erfolglose Versuche}\} = \{\xi > 8\}$

$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(\xi_B > 8), \qquad \mathbf{P}(A|\overline{B}) = \mathbf{P}(\xi_A > 8)$

Ges.: $\mathbf{P}(B|A)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(B|A) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A|B) \cdot \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|\overline{B}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B})} \\
&= \frac{\mathbf{P}(\xi_B > 8) \cdot \frac{1}{3}}{\mathbf{P}(\xi_B > 8) \cdot \frac{1}{3} + \mathbf{P}(\xi_A > 8) \cdot \frac{2}{3}} \underset{\text{NR}}{=} 0.5184
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{Nebenrechnung:} \quad \mathbf{P}(\xi_A > 8) &= \mathbf{P}(\xi_A = 9) + \mathbf{P}(\xi_A = 10) = \frac{2}{10} = 0.2 \\
\mathbf{P}(\xi_B > 8) &= \sum_{k=9}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_B = k) = \sum_{k=9}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \\
&= (1-p)^8 \cdot p \sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l = (1-p)^8 \cdot \frac{p}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^8 = \left(\frac{9}{10}\right)^8 = 0.4305
\end{aligned}$$

7.3. ξ - Anzahl der Würfe bis erstmalig Zahl, $\xi \in \{1, 2, \dots\}$
geometrisch verteilt:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \qquad k = 1, 2, \dots$$

η - Gewinn: $\quad \eta = 2^{\xi}, \quad \eta \in \{2^1, 2^2, \dots\}$

$$\mathbf{P}(\eta = 2^k) = \mathbf{P}(\xi = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

(a) Spiel gerecht: Einsatz $= \mathbf{E}\eta$

$$\mathbf{E}\eta = \mathbf{E}2^{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$\nexists$ gerechtes Spiel, stets Verlust der Bank, wenn Einsatz $< \infty$

(b) $\mathbf{E}\xi = \frac{1}{p} = 2, \qquad \text{da } p = \frac{1}{2}$

Beachte: $\infty = \mathbf{E}\eta = \mathbf{E}2^{\xi} \neq 2^{\mathbf{E}\xi} = 2^2 = 4$

(c) Definieren ξ':

$$\xi' = \begin{cases} \xi & \xi \leq 9 \\ 10 & \xi > 9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\xi' = k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & k \leq 9 \\ \sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^9 & k > 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\eta' &= 2^{\xi'} \\
\mathbf{E}\eta' &= \sum_{k=1}^{9} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 9 + 2 = 11
\end{aligned}$$

7.4. Geg.: in 1h im Mittel 240 Autos

Ges.: $\mathbf{P}(\{$ mehr als 3 Autos in 15 Sekunden $\}) = ?$

ξ_t - Anzahl der Autos in Zeit t - poissonverteilt

$$\text{für } t = 15\,\text{sec} \quad \mathbf{P}(\xi_t > 3) = 1 - [\mathbf{P}(\xi_t = 0) + \mathbf{P}(\xi_t = 1) + \mathbf{P}(\xi_t = 2) + \mathbf{P}(\xi_t = 3)]$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$\underset{\text{NR}}{=} 1 - e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)$$
$$= 1 - 0.9810 = 0.01899$$

$$\text{NR zur Bestimmung von } \lambda\text{:} \quad \lambda = \tilde{\lambda} t, \quad t = 1\,\text{h} = 3600\,\text{sec}$$
$$\tilde{\lambda} t = \mathbf{E}\xi_t = 240 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{240}{3600\,\text{sec}} = \frac{1}{15\,\text{sec}}$$
$$\text{für } t = 15\,\text{sec ist } \lambda = \tilde{\lambda} t = 1$$

7.5.

$$\mathbf{P}(\xi_{min} \geq x) = \mathbf{P}(\{\xi_1 \geq x\} \cap \{\xi_2 \geq x\} \cap \cdots \cap \{\xi_n \geq x\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\{\xi_i \geq x\})$$

(da unabhängig)

$\mathbf{P}(\xi_{max} < x)$ analog

7.6. Skizze

$$F_{\xi^2}(y) = \mathbf{P}(\xi^2 \leq y) = \mathbf{P}(\xi \leq \sqrt{y}) - \mathbf{P}(\xi \leq -\sqrt{y}) + \mathbf{P}(\xi = -\sqrt{y})$$
$$= F_\xi(+\sqrt{y}) - F_\xi(-\sqrt{y}) + P_\xi(-\sqrt{y})$$

7.7. (i) $\xi = a = const. \quad \Rightarrow \quad$ zu zeigen:

$$\mathbf{P}(\xi \leq x_1, \xi \leq x_2) = \mathbf{P}(\xi \leq x_1) \cdot \mathbf{P}(\xi \leq x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$$

hier: $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(\xi \leq x_1, \xi \leq x_2) = \chi_{(-\infty, x_1]}(a) \cdot \chi_{(-\infty, x_2]}(a)$$
$$= \mathbf{P}(\xi \leq x_1) \cdot \mathbf{P}(\xi \leq x_2)$$

(ii) ξ und ξ unabhängig $\quad\Rightarrow\quad$ zu zeigen: $\xi = const.$

S 2, 5 folgt: $\quad \mathbf{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbf{E}\xi \cdot \mathbf{E}\eta \quad$, wenn ξ, η unabhängig

also gilt: $\quad \mathbf{E}\xi^2 = (\mathbf{E}\xi)^2$

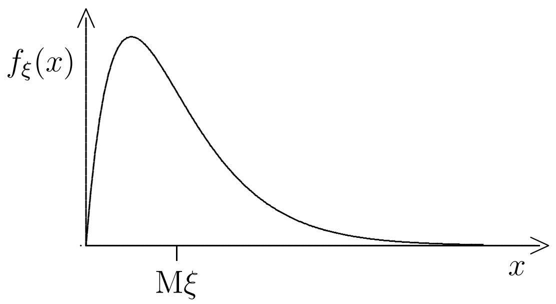
und: $\quad \mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \xi = const. \quad (\mathbf{P} -$ fast sicher$)$

8 Absolut stetige Zufallsgrößen

8.1. ξ - Lebensdauer
Gammaverteilung:

$$f_\xi(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \frac{x}{\beta^2}\,e^{-\dfrac{x}{\beta}}, \quad x > 0 \qquad \text{(hier speziell } \alpha = 2\text{)}$$

- Dabei ist $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$;
  (dann gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und speziell $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$)
- Spezialfall $\alpha = n$ ganzzahlig $\Rightarrow$ Erlangverteilung mit Parametern n und β (vgl. Aufgabe 8.3)



(a) Geg.: $\mathbf{E}\xi = 100$ Ges.: β
Bestimmen zunächst $\mathbf{E}\xi$ aus der Def. der Verteilung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\xi &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f_\xi(x)\,dx = \int\limits_0^\infty x\,\frac{x}{\beta^2}\,e^{-x/\beta}\,dx = \frac{1}{\beta^2}\int\limits_0^\infty x^2\,e^{-x/\beta}\,dx \\
&= \frac{1}{\beta^2}\int\limits_0^\infty (\beta t)^2\,e^{-t}\,\beta\,dt \qquad \left(\text{mit } t = \frac{x}{\beta} \Rightarrow dx = \beta\,dt\right) \\
&= \beta\int\limits_0^\infty t^2\,e^{-t}\,dt = \beta\,\Gamma(3) = \beta\,2! = 2\beta
\end{aligned}$$

D.h. $100 = \mathbf{E}\xi = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta = 50}$

(Eine weitere Möglichkeit wäre, den Erwartungswert der Gammaverteilung aus Tabellen o. ä. zu erhalten: $\mathbf{E}\xi = \alpha\beta = 2\beta$ (da hier $\alpha = 2$).)

(b) Benötigen zunächst Verteilungsfunktion $F_\xi(x)$:

$$\begin{aligned}
F_\xi(x) &= P(\xi \le x) = \int_0^x f_\xi(t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{\beta^2}\,\mathrm{e}^{-t/\beta}\,dt \\
&= \frac{1}{\beta^2}\left[-\beta t\mathrm{e}^{-t/\beta}\,\Big|_0^x - \int_0^x (-\beta)\,\mathrm{e}^{-t/\beta}\,dt\right] \qquad \text{(Partielle Integration mit } u = t \text{ und } v' = \mathrm{e}^{-t/\beta}) \\
&= \frac{1}{\beta}\left[-x\,\mathrm{e}^{-x/\beta} - \beta\,\mathrm{e}^{-t/\beta}\,\Big|_0^x\right] \\
&= \frac{1}{\beta}\left[-x\,\mathrm{e}^{-x/\beta} - \beta\left(\mathrm{e}^{-x/\beta} - 1\right)\right] \\
&= \underline{\underline{1 - \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)\mathrm{e}^{-x/\beta}}}
\end{aligned}$$

Berechnen jetzt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

- $P(\{\text{Pumpe funktioniert höchstens 100 h}\}) = P(\xi \le 100) = F(100)$
  $= 1 - \left(1 + \frac{100}{50}\right)\mathrm{e}^{-100/50} = 1 - 3\mathrm{e}^{-2} = \underline{\underline{0.5940}}$
- $P(\{\text{Pumpe funkioniert höchstens (noch) 100 h, nachdem sie bereits 100 h lief}\})$
  $= P(\underbrace{\xi \le 200}_{A} \mid \underbrace{\xi \ge 100}_{B})$
  $$\begin{aligned}
  &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} && \text{(Def. der bedingten WK)} \\
  &= \frac{P(100 \le \xi \le 200)}{P(\xi \ge 100)} \\
  &= \frac{F_\xi(200) - F_\xi(100-0)}{1 - F_\xi(100-0)} && \text{(Dabei ist } F_\xi(100-0) = F_\xi(100)\text{, da } F_\xi \text{ stetig ist.)} \\
  &= \frac{(1+2)\mathrm{e}^{-2} - (1+4)\mathrm{e}^{-4}}{(1+2)\mathrm{e}^{-2}} = \underline{\underline{0.7744}}
  \end{aligned}$$
- $P(\{\text{Pumpe funkioniert höchstens (noch) 100 h, nachdem sie bereits 200 h lief}\})$
  $= P(\xi \le 300 \mid \xi \ge 200)$
  $= \ldots$
  $= \dfrac{(1+4)\mathrm{e}^{-4} - (1+6)\mathrm{e}^{-6}}{(1+4)\mathrm{e}^{-4}} = \underline{\underline{0.8105}}$
  $\Rightarrow$
  Vermutung: $P(\xi \le x + 100 \mid \xi \ge x)$ ist monoton wachsend. Je älter die Pumpe, so wahrscheinlicher der Ausfall.
  Frage: Gilt das auch für die Exponentialverteilung?

(c) Exponentialverteilung:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-x/\beta}, \qquad x > 0$$

(Das entspricht einer Gammaverteilung mit den Parametern $\alpha = 1$ und β bzw. einer Erlangverteilung mit den Parametern $n = 1$ und β.)

- $\mathbf{E}\xi = \alpha\beta = \beta$, wenn $100 = \mathbf{E}\xi \Rightarrow \underline{\beta = 100}$
- Verteilungsfunktion: $F_\xi(x) = \int\limits_0^x f_\xi(t)\,dt = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t/\beta}\,dt = 1 - \mathrm{e}^{-x/\beta}, \qquad x > 0$
- $P(\xi \leq 100) = F_\xi(100) = \underline{\underline{1 - \mathrm{e}^{-1} = 0.6321}}$

  $P(\xi \leq 200 \,|\, \xi \geq 100) = \cdots = \dfrac{F_\xi(200) - F_\xi(100)}{1 - F_\xi(100)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \underline{\underline{1 - \mathrm{e}^{-1} = 0.6321}}$

  $P(\xi \leq 300 \,|\, \xi \geq 200) = \cdots = \dfrac{F_\xi(300) - F_\xi(200)}{1 - F_\xi(200)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}} = \underline{\underline{1 - \mathrm{e}^{-1} = 0.6321}}$

Pumpe scheint nicht zu altern.
Genauer: Man kann zeigen: $P(\xi \leq y \,|\, \xi \geq x) = P(\xi \leq y - x), \qquad y > x.$
Typische Eigenschaft der Exponentialverteilung ($\Rightarrow$ Gedächtnislosigkeit).

8.2. Sei ξ_t die Anzahl beantragter Landegenehmigungen in der Zeit t.
ξ_t ist Poisson-verteilt mit Parameter λ, d. h.

- $P(\xi_t = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$
- $\mathbf{E}\xi_t = \mathbf{D}\xi_t = \lambda$

Für $t = 1$ h $= 60$ min gilt $\mathbf{E}\xi_t = 20$.
Sei $\widetilde{\lambda}$ die Intensität (d. h. $\lambda = \widetilde{\lambda}t$).
Dann gilt für $t = 60$ min : $\lambda = \widetilde{\lambda} \cdot 60$ min $= \mathbf{E}\xi_t = 20 \Rightarrow \underline{\widetilde{\lambda} = \frac{1}{3}\,[\mathrm{min}^{-1}]}$

(a) $t = 1$ min $: \lambda = \tilde{\lambda}t = \frac{1}{3}[min^{-1}] \cdot 1[min] = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
P(\underbrace{\xi_t \geq 2}_{\{\text{Stau}\}}) &= 1 - [P(\xi_t = 0) + P(\xi_t = 1)] \\
&= 1 - \left[\frac{(1/3)^0}{0!}\mathrm{e}^{-1/3} + \frac{(1/3)^1}{1!}\mathrm{e}^{-1/3}\right] \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-1/3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \underline{\underline{0.0446}}
\end{aligned}$$

(b) Sei η die Zeit zwischen 2 Beantragungen einer Landeerlaubnis.

Verteilung von η:

$$\begin{aligned}
F_\eta(t) = P(\eta \le t) &= P(\{\text{nächstes Ereignis in } (0,t]\}) \\
&= P(\{\text{mindestens ein Ereignis in } (0,t]\}) \\
&= P(\xi_t \ge 1) = 1 - P(\xi_t = 0) = 1 - \frac{\left(\widetilde{\lambda} t\right)^0}{0!} \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda} t} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda} t}, \qquad t > 0 \\
&\ \text{(Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\eta \in [4,6]) &= F_\eta(6) - F_\eta(4) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}\cdot 6}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-\widetilde{\lambda}\cdot 4}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-4/3} - \mathrm{e}^{-2} = \underline{\underline{0.1283}}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der gesuchte Wert läßt sich auch als $P(\xi_{4\text{ min}} = 0) \cdot P(\xi_{2\text{ min}} \ge 1)$ bestimmen.

8.3. • Ohne Verwendung des Hinweises:

$$\begin{aligned}
1 - F(x) &= P(\xi > x) = \int_x^\infty f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\beta(n-1)!} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t/\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{n-1} dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{(n-1)!} \int_{x/\beta}^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{n-1}\,ds}_{I_{n-1}(x)} \qquad \left(\text{mit } s = \frac{t}{\beta},\ dt = \beta\,ds\right)
\end{aligned}$$

Betrachten $I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x/\beta}^\infty \mathrm{e}^{-s} s^n\,ds$, partielle Integration mit $u' = \mathrm{e}^{-s},\ v = s^n$:

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \frac{1}{n!} \left[-\mathrm{e}^{-s} s^n \Big|_{x/\beta}^\infty + n \int_{x/\beta}^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{n-1}\,ds \right] \\
&= \frac{1}{n!} \mathrm{e}^{-x/\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n + I_{n-1}(x) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-x/\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k + I_0(x) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-x/\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k
\end{aligned}$$

Denn: $I_0(x) = \frac{1}{0!} \int\limits_{x/\beta}^{\infty} \mathrm{e}^{-s} s^0 \, ds = \mathrm{e}^{-x/\beta} = \frac{1}{0!} \, \mathrm{e}^{-x/\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^0$

$\Rightarrow$ Behauptung durch Einsetzen von $I_{n-1}(x)$ in obige Formel.

- Mit Verwendung des Hinweises:
  Wir betrachten

  $\xi \sim \text{Erlang}(n, \beta)$

  $\eta_x \sim \text{Poisson}\left(\frac{x}{\beta}\right)$, also $P(\eta_x = k) = \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{-x/\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k$

  $\nu_k \sim \text{Exponential}(\beta)$, also $f_{\nu_k}(x) = \frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{-x/\beta}, \quad x > 0$

  η_x beschreibt die Zahl der Ausfälle im Intervall $(0, x]$.
  Die ν_k seien *i.i.d.*, sie beschreiben jeweils die Zeit bis zum ersten Ausfall, sind also Lebensdauern.
  (Zusammenhang zwischen Poisson- und Exponentialverteilung vgl. Aufgabe 8.2b.)
  Es gilt $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k$ Summe von n zufälligen Lebensdauern. (Ein Ausfall führt zum sofortigen Ersetzen.) Die Anzahl der Ausfälle ist Poissonverteilt.

$$
\begin{aligned}
1 - F_\xi(x) &= P(\xi > x) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k > x\right) \\
&= P(\{\text{im Intervall } (0, x] \text{ höchstens } (n-1) \text{ Ausfälle}\}) \\
&= P(\eta_x \leq n - 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(\eta_x = k) \\
&= \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \, \mathrm{e}^{-x/\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k}}
\end{aligned}
$$

8.4. *Bemerkung:* Die Flughöhe als Funktion der Zeit ist ein zufälliger Prozeß ξ_t:

$$(\Omega, \mathfrak{A}) \xrightarrow{\xi_t} \left(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)\right)$$

Betrachten hier nur die Flughöhe zu einer festen (gegebenen) Zeit.

Geg.: ξ — Flughöhe

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \qquad \text{mit } \ m = 4350 \text{ [m]}, \ \sigma^2 = 400 \text{ [m}^2\text{]}$$

(a)

$$\begin{aligned}
P(\xi \in [4300, 4400]) &= F(4400) - F(4300) \\
&\quad \text{(Tabelliert ist lediglich die standardisierte Normalverteilung } \Phi(x)) \\
&= P\left(\eta = \frac{\xi - m}{\sigma} \in \left[\frac{4300-4350}{20}, \frac{4400-4350}{20}\right]\right) \\
&= P(\eta \in [-2.5, 2.5]) \\
&= \Phi(2.5) - \Phi(-2.5) \\
&= \Phi(2.5) - (1 - \Phi(2.5)) \\
&= 2\Phi(2.5) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.99379 - 1 \qquad \text{(Tabelle)} \\
&= \underline{\underline{0.98758}}
\end{aligned}$$

Analog kann man die Wahrscheinlichkeit für das Unterfliegen des Höhenkorridors berechnen: $P(\xi < 4300) = 0.00621$. Wir fordern in Aufgabe 8.4b, daß diese Wahrscheinlichkeit kleiner als 0.005 ist.
$\Rightarrow$ Mittelwert 4350 m muß vergrößert werden.

(b)

$$\begin{aligned}
0.005 &= P(\xi < 4300) \\
&= P\left(\eta < \frac{4300 - m}{20}\right) \qquad \text{mit } \eta = \frac{\xi - m}{20} \text{ (Standardisierung)} \\
&= \Phi\left(\frac{4300 - m}{20}\right) = \Phi(z)
\end{aligned}$$

Suchen also z so, daß $\Phi(z) = 0.005$.
z ist negativ, da $m > 4300$.
Bestimmen also $-z$ aus $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) = 0.995$
Aus der Tabelle der standardisierten Normalverteilung lesen wir $\underline{-z = 2.576}$ ab.
(D. h. $-z$ ist *0.5%-Quantil* der standardisierten Normalverteilung.)
Lösung:

$$m = 4300 + 2.576 \cdot 20 = \underline{\underline{4351.52}}$$

8.5. Geg.: ξ — Abfüllmenge

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \qquad \text{mit } m = 500 \text{ [ml]}, \ \sigma^2 = 4 \text{ [ml}^2\text{]}$$

(a)

$$P(\xi < 497) = P\left(\eta < \frac{497 - 500}{2}\right) = \Phi(-1.5) = 0.06681$$

(Mit der Standardisierung $\eta = \dfrac{\xi - 500}{2}$, $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$)

Bei 20 Flaschen sind das <u>im Mittel</u> $20 \cdot 0.06681 = \underline{1.3362}$ Flaschen.
(Das Ergebnis sollte nicht auf 1 gerundet werden, da Mittelwerte nicht angenommen werden müssen, im Einzelfall können es $0, 1, 2, \ldots$ Flaschen sein.)

(b) Fordern:

$$0.01 \geq P(\xi > 504) = 1 - \Phi\left(\frac{504 - m}{2}\right) = 1 - \Phi(z)$$

$$\Rightarrow \Phi(z) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow z \geq 2.326 \qquad \text{(Tabelle der standardisierten Normalverteilung)}$$

$$\Rightarrow m \leq 504 - 2 \cdot 2.326 = \underline{\underline{499.348}}$$

8.6. Geg.: ξ — Widerstand

(a)

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad \text{mit } \ \mu = 990 \ [\Omega], \ \sigma^2 = 400 \ [\Omega^2]$$

$$\begin{aligned} P(950 < \xi < 1050) &= P\left(\frac{950-990}{20} < \eta < \frac{1050-990}{20}\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(-2) = \underline{0.9759} \end{aligned}$$

$$\text{(Mit der Standardisierung } \eta = \frac{\xi - 990}{20}, \ \eta \sim \mathcal{N}(0,1))$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(\{\text{Ausschuß}\}) = 0.0241}}$$

(b)

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad \text{mit } \ \mu = 1000 \ [\Omega], \ \sigma^2 = 400 \ [\Omega^2]$$

$$\begin{aligned} P(950 < \xi < 1050) &= P\left(\frac{950-1000}{20} < \eta < \frac{1050-1000}{20}\right) \\ &= \Phi(2.5) - \Phi(-2.5) = \underline{0.9876} \end{aligned}$$

$$\text{(Mit der Standardisierung } \eta = \frac{\xi - 1000}{20}, \ \eta \sim \mathcal{N}(0,1))$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(\{\text{Ausschuß}\}) = 0.0124}}$$

Es wird also ungefähr eine Halbierung des Ausschußanteiles erreicht.

(c)

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad \text{mit } \ \mu = 1000 \ [\Omega],$$

Fordern:

$$\begin{aligned} 0.9 \leq P(990 < \xi < 1010) &= P\left(\frac{990-1000}{\sigma} < \eta < \frac{1010-1000}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) \geq 0.95$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\sigma} \geq 1.645$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma \leq 6.08 \ [\Omega]}}$$

9 Zufallsvektoren, Korrelation

9.1. Seien
ξ — Lebensdauer von B_1
η — Lebensdauer von B_2.
ξ und η sind unabhängig, exponentialverteilt mit den Erwartungswerten $\mathbf{E}\xi = 10000$ und $\mathbf{E}\eta = 20000$.
Also gilt für die Verteilungs- und Dichtefunktionen von ξ und η:

$$F_\xi(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad f_\xi(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad (x > 0), \qquad \mathbf{E}\xi = \frac{1}{\lambda}$$

$$F_\eta(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu x} \qquad f_\eta(x) = \mu\,\mathrm{e}^{-\mu x} \qquad (x > 0), \qquad \mathbf{E}\eta = \frac{1}{\mu}$$

Wegen der Unabhängigkeit gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion:

$$F_{\xi\eta}(x,y) \doteq P(\xi \le x, \eta \le y) = P(\xi \le x)\,P(\eta \le y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$$

und für die Dichtefunktion:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(\xi > \eta)$.

$$\begin{aligned}
P(\xi > \eta) = \iint\limits_{\{(x,y):\,x>y\}} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^\infty \left[\int_0^x f_{\xi\eta}(x,y)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^x \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mu\mathrm{e}^{-\mu y}\,dy\right] dx = \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\left[\int_0^x \mu\mathrm{e}^{-\mu y}\,dy\right] dx \\
&= \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\left[-\mathrm{e}^{-\mu y}\Big|_0^x\right] dx \\
&= \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu x}\right) dx \\
&= \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx - \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\,dx \\
&= -\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}\Big|_0^\infty \\
&= 1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

[2]

[2]Skizze des Integrationsgebietes

9.2. (a) $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0,1),\ \xi_2 = \xi_1^2 - 1$

Dichte von ξ_1 und ξ_2 skizzieren

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\xi_1 &= 0\\ \mathbf{E}\xi_2 &= \mathbf{E}\xi_1^2 - 1 = 0 \qquad \text{wegen} \quad \mathbf{E}\xi_1^2 = \mathbf{D}\xi_1 + (\mathbf{E}\xi_1)^2 = \mathbf{D}\xi_1 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) &= \mathbf{E}\left((\xi_1 - \mathbf{E}\xi_1)(\xi_2 - \mathbf{E}\xi_2)\right)\\ &= \mathbf{E}\left(\xi_1\left(\xi_1^2 - 1\right)\right)\\ &= \mathbf{E}\xi_1^3 - \mathbf{E}\xi_1\\ &= 0 \qquad\qquad (\text{da } \xi_1 \text{ symmetrisch verteilt ist})\end{aligned}$$

$\Rightarrow \xi_1$ und ξ_2 sind unkorreliert.

Aber: ξ_1 und ξ_2 sind (funktional) abhängig.
Es gilt z. Bsp.

$$\begin{aligned}P(\{\xi_1 > 1\} \cap \{\xi_2 > 1\}) &= P(\xi_1 > \sqrt{2}) = 1 - \Phi(\sqrt{2})\\ P(\xi_1 > 1)P(\xi_2 > 1) &= P(\xi_1 > 1)P(|\xi_1| > \sqrt{2})\\ &= P(\xi_1 > 1) \cdot 2P(\xi_1 > \sqrt{2})\\ &= 2(1 - \Phi(1))(1 - \Phi(\sqrt{2}))\\ \Rightarrow P(\xi_1 > 1)P(\xi_2 > 1) &\neq P(\{\xi_1 > 1\} \cap \{\xi_2 > 1\})\end{aligned}$$

(b) $\xi_1 = \sin\eta,\ \xi_2 = \cos\eta,\ \eta \sim \mathcal{U}(0,2\pi)$ (gleichmäßige Verteilung auf $(0,2\pi)$)

Verlauf von $\sin x$ und $\cos x$ in $(0,2\pi)$ skizzieren

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{für } y \in (0,2\pi)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$\mathbf{E}\xi_1 = \int\limits_0^{2\pi} (\sin y)\,\frac{1}{2\pi}\,dy = 0$$

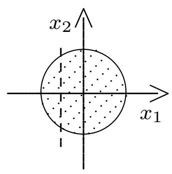
$$\mathbf{E}\xi_2 = \int\limits_0^{2\pi} (\cos y)\,\frac{1}{2\pi}\,dy = 0$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) &= \mathbf{E}\xi_1\xi_2 - \mathbf{E}\xi_1\mathbf{E}\xi_2 \\
&= \mathbf{E}\xi_1\xi_2 \\
&= \mathbf{E}\sin\eta\cos\eta \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}\sin 2\eta \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\sin 2y)\,\frac{1}{2\pi}\,dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \xi_1$ und ξ_2 sind unkorreliert.
Aber: ξ_1 und ξ_2 sind funktional abhängig, denn $\xi_1^2+\xi_2^2=1$, bzw.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\xi_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \xi_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \mathbf{P}(\sin\eta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\eta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) = \mathbf{P}(\eta = \frac{\pi}{4}) = 0 \\
\mathbf{P}(\xi_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot \mathbf{P}(\xi_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \neq 0 \text{ !!}
\end{aligned}$$

(c) $f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für } x_1^2+x_2^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$$f_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_R f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_2 = \int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{1}{\pi}\,dx_2 = \tfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x_1^2}, \qquad |x_1^2| \leq 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}\xi_1 = \int\limits_R x_1 f_{\xi_1}(x_1)\,dx_1 = 0$$

da $f_{\xi_1}(x_1)$ eine gerade Funktion ist.
Völlig analog folgt $f_{\xi_2}(x_2) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x_2^2}, \qquad |x_2^2| \leq 1.$

$$\Rightarrow \mathbf{E}\xi_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) &= \mathbf{E}\xi_1\xi_2 \\
&= \iint x_1x_2 f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{x_1^2+x_2^2\leq 1} x_1x_2\,dx_1dx_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \xi_1$ und ξ_2 sind unkorreliert.
Aber: ξ_1 und ξ_2 sind nicht unabhängig, denn für $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ gilt:

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)} = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)$$

Bemerkung:
Bei einer Gleichverteilung auf dem Einheits*quadrat* würde neben der Unkorreliertheit auch die Unabhängigkeit folgen:

$$f_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = 1 = 1 \cdot 1 = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)$$

9.3. Es gilt:

$$\rho = \rho(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}}$$

<u>Rückrichtung "$\Leftarrow$":</u> $\quad P(\eta = a\xi + b) = 1 \Rightarrow |\rho| = 1$

$\eta = a\xi + b$ fast sicher $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\eta &= \mathbf{E}(a\xi + b) = a\mathbf{E}\xi + b \\
\eta - \mathbf{E}\eta &= (a\xi + b) - (a\mathbf{E}\xi + b) = a(\xi - \mathbf{E}\xi) \\
\mathbf{D}\eta &= \mathbf{D}(a\xi + b) = a^2\mathbf{D}\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\rho(\xi, \eta)| &= \left| \frac{\mathbf{E}\left((\xi - \mathbf{E}\xi)\, a\, (\xi - \mathbf{E}\xi)\right)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\, a^2\, \mathbf{D}\xi}} \right| \\
&= \left| \frac{a\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2}{|a|\mathbf{D}\xi} \right| \\
&= \left| \frac{a\mathbf{D}\xi}{a\mathbf{D}\xi} \right| = 1
\end{aligned}$$

<u>Hinrichtung "$\Rightarrow$":</u> $\quad |\rho| = 1 \Rightarrow P(\eta = a\xi + b) = 1$

Sei $\widehat{\xi} \doteq \dfrac{\xi - \mathbf{E}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}$ und $\widehat{\eta} \doteq \dfrac{\eta - \mathbf{E}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}$. Dann gilt: $\rho = \mathbf{E}\widehat{\xi}\widehat{\eta}$.

Betrachten:

$$0 \leq \mathbf{E}(\widehat{\xi} \pm \widehat{\eta})^2 = \mathbf{E}\widehat{\xi}^2 + \mathbf{E}\widehat{\eta}^2 \pm 2\mathbf{E}\widehat{\xi}\widehat{\eta} = 1 + 1 \pm 2\rho$$

(weil $\mathbf{E}\widehat{\xi}^2 = \mathbf{E}\left(\dfrac{(\xi - \mathbf{E}\xi)^2}{\mathbf{D}\xi}\right) = \dfrac{\mathbf{D}\xi}{\mathbf{D}\xi} = 1$ und analog $\mathbf{E}\widehat{\eta}^2 = 1$)

Für $\rho = \mp 1$ ist also $\mathbf{E}(\widehat{\xi} \pm \widehat{\eta})^2 = 2 \pm 2\rho = 0$, damit ist auch $\mathbf{D}(\widehat{\xi} \pm \widehat{\eta}) = 0$ und somit existiert schließlich eine Konstante c mit $P(\widehat{\xi} \pm \widehat{\eta} = c) = 1$.

Das bedeutet:

$$\begin{aligned}
1 &= P\left(\frac{\xi-\mathbf{E}\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}} \pm \frac{\eta-\mathbf{E}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\eta}} = c\right)\\
&= P\left(\eta = \underbrace{\mp\sqrt{\frac{\mathbf{D}\eta}{\mathbf{D}\xi}}}_{a}\,\xi + \underbrace{\mathbf{E}\eta \pm \left(c\sqrt{\mathbf{D}\eta} + \sqrt{\frac{\mathbf{D}\eta}{\mathbf{D}\xi}}\mathbf{E}\xi\right)}_{b}\right)\\
&= P(\eta = a\xi + b)
\end{aligned}$$

9.4. $\xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$, unabhängig, $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$
Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\eta_1 &= \mathbf{E}\xi_1 + \mathbf{E}\xi_2 = 0\\
\mathbf{E}\eta_2 &= \mathbf{E}\xi_1 - \mathbf{E}\xi_2 = 0\\
\mathbf{D}\eta_1 &= \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 = 2 &&\text{(vgl. Unabhängigkeit)}\\
\mathbf{D}\eta_2 &= \mathbf{D}\xi_1 + \mathbf{D}\xi_2 = 2\\
\eta_1, \eta_2 &\sim \mathcal{N}(0,2) &&\text{(vgl. Summe unabh. normalverteilter ZG)}
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) &= \mathbf{E}(\eta_1 - \mathbf{E}\eta_1)(\eta_2 - \mathbf{E}\eta_2) = \mathbf{E}\eta_1\eta_2 = \mathbf{E}(\xi_1+\xi_2)(\xi_1-\xi_2)\\
&= \mathbf{E}(\xi_1^2 - \xi_2^2) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \eta_1$ und η_2 sind unkorreliert.

(b) Da die ZG η_1 und η_2 normalverteilt sind, ist Unkorreliertheit hier gleichbedeutend mit Unabhängigkeit.

10 Bedingte Erwartung

10.1. Sei ξ_i die Augenzahl des i-ten Würfels ($i = 1, 2$),
sei η die Augensumme, d. h. $\eta = \xi_1 + \xi_2$ ($\Rightarrow \eta \in \{2, \ldots, 12\}$).
$\mathbf{E}(\xi_1|\eta)$ ist dann eine Zufallsgröße mit Werten $\mathbf{E}(\xi_1|\eta = k) \quad k = 2, \ldots, 12$.
Dabei ist $\mathbf{E}(\xi_1|\eta = k) = \sum_{i=1}^{6} iP(\xi_1 = i|\eta = k)$ eine Zahl („üblicher"Erwartungswert).
Für die einzelnen Teilaufgaben existieren natürlich unterschiedliche Lösungswege, die einzelnen Anstriche kennzeichnen im folgenden alternative Lösungsmöglichkeiten.

(a)
- Augensumme 9 kann nur bei folgenden gewürfelten Paaren auftreten: $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$.
  Unter der Bedingung, daß die Augensumme 9 beträgt, ist es daher unmöglich, daß der erste Würfel die Augenzahl 1 oder 2 zeigt, die Augenzahlen 3 bis 6 sind dagegen gleichwahrscheinlich. Wir erhalten also:

$$P(\xi_1 = i|\eta = 9) = \begin{cases} 0 & i = 1, 2 \\ \frac{1}{4} & i = 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

-

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = i|\eta = 9) &= \frac{P(\xi_1 = i, \eta = 9)}{P(\eta = 9)} \\ &= \frac{P(\xi_1 = i, \xi_2 = 9 - i)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 9)} \\ &= \frac{P(\xi_1 = i)P(\xi_2 = 9 - i)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 9)} \qquad \text{(da } \xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ unabh. sind)} \\ &= \begin{cases} 0 & i = 1, 2 \\ \dfrac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{4}{36}} & i = 3, 4, 5, 6 \end{cases} \qquad \text{(Vgl. klassische Methode zur Berechnung von WK)} \\ &= \underline{\underline{\begin{cases} 0 & i = 1, 2 \\ \frac{1}{4} & i = 3, 4, 5, 6 \end{cases}}} \end{aligned}$$

(b)
-

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi_1|\eta = 9) &= \sum_{i=1}^{6} iP(\xi_1 = i|\eta = 9) \\ &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \underline{\underline{\frac{9}{2}}} \end{aligned}$$

- $\mathbf{E}(\xi_1|\eta = 9)$ ist (konstanter) Wert der Zufallsgröße $\mathbf{E}(\xi_1|\eta)$ auf dem Atom $\mathcal{D}_9$ der von η erzeugten Zerlegung $\mathcal{D}_\eta$.
  $\mathcal{D}_9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$
  Es gilt:

  $$\int\limits_{\mathcal{D}_9} \mathbf{E}(\xi_1|\eta)\,dP = \mathbf{E}(\xi_1|\eta = 9)\cdot P(\mathcal{D}_9)$$

  (da $\mathbf{E}(\xi_1|\eta)$ auf $\mathcal{D}_9$ den konstanten Wert $\mathbf{E}(\xi_1|\eta = 9)$ annimmt)

  und andererseits

  $$\int\limits_{\mathcal{D}_9} \xi_1\,dP = (3+4+5+6)\cdot\frac{1}{36} = \frac{1}{2}$$

  Wegen der Definition des bedingten Erwartungswertes ist aber

  $$\int\limits_{\mathcal{D}_9} \mathbf{E}(\xi_1|\eta)\,dP = \int\limits_{\mathcal{D}_9} \xi_1\,dP$$

  Wegen $P(\mathcal{D}_9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ ist schließlich

  $$\mathbf{E}(\xi_1|\eta = 9) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{9}} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

(c) $\mathbf{E}(\xi_1|\eta)$ ist Zufallsgröße mit Werten $\mathbf{E}(\xi_1|\eta = k)$.
Wie in Teilaufgabe 10.1b erhält man für $k = 2,\ldots,12$ leicht:

$$\mathbf{E}(\xi_1|\eta = k) = \frac{k}{2}$$

Gesucht werden jetzt also die Wahrscheinlichkeiten $P\left(\mathbf{E}(\xi_1|\eta) = \frac{k}{2}\right)$.
Man zeigt, daß gilt:

$$P\left(\mathbf{E}(\xi_1|\eta) = \frac{k}{2}\right) = P(\eta = k) \qquad (*)$$

Die Verteilung von η läßt sich leicht über die klassische Methode bestimmen (Dreieckverteilung). Damit gilt dann:

$$\underline{\underline{P\left(\mathbf{E}(\xi_1|\eta) = \frac{k}{2}\right) = \frac{6-|7-k|}{36}}} \qquad k = 2,\ldots,12$$

Bemerkung:
Die Beziehung $(*)$ kann man z. B. über die klassische Methode erhalten oder über folgende Überlegung:

Betrachten

$$\begin{aligned}
2\mathbf{E}(\xi_1|\eta) &= \mathbf{E}(\xi_1|\eta) + \mathbf{E}(\xi_1|\eta) \\
&= \mathbf{E}(\xi_1|\eta) + \mathbf{E}(\xi_2|\eta) \qquad \text{da } \xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ identisch verteilt sind)} \\
&= \mathbf{E}(\xi_1 + \xi_2|\eta) \\
&= \mathbf{E}(\eta|\eta) = \eta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\xi_1|\eta) = \frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow P\left(\mathbf{E}(\xi_1|\eta) = \frac{k}{2}\right) = P(\eta = k)$$

(d) • Es gilt:

$$\mathbf{E}\mathbf{E}(\xi_1|\eta) = \mathbf{E}\xi_1 = \frac{7}{2} \qquad \text{(einfache Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes)}$$

• Es gilt:

$$\mathbf{E}\mathbf{E}(\xi_1|\eta) = \sum_{k=2}^{12} \mathbf{E}(\xi_1|\eta = k)P(\eta = k) = \sum_{k=2}^{12} \frac{k}{2}\,\frac{6 - |7-k|}{36} = \frac{7}{2}$$

10.2. *Beispiel 1*

Sei η die beim Wurf eines Würfels erzielte Augenzahl, d. h.

$$P(\eta = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6$$

Sei

$$\xi = \tau\eta$$

mit

$$P(\tau = -1) = P(\tau = 1) = \frac{1}{2} \quad , \tau \text{ und } \eta \text{ seien unabhängig.}$$

$\Rightarrow \xi \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6\}$.

Dann gilt für $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$:

$$\begin{aligned}
P(\xi = j) &= P(\tau\eta = j) \\
&= P(\eta = |j|, \tau = \mathrm{sgn}(j)) \\
&= P(\eta = j)P(\tau = \mathrm{sgn}(j)) \qquad \text{(da } \tau \text{ und } \eta \text{ unabhängig sind)} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Dann gilt:

- ξ und η sind abhängig, denn

$$P(\xi = 1, \eta = 2) = P(\tau\eta = 1, \eta = 2) = 0 \qquad \text{aber}$$

$$P(\xi = 1)P(\eta = 2) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \neq 0$$

- $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}(\xi)$, denn

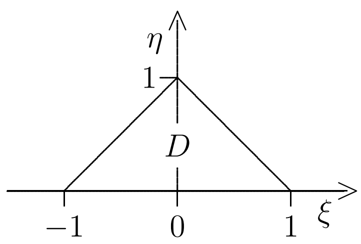
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\xi|\eta) &= \mathbf{E}(\tau\eta|\eta) \\
&= \eta\mathbf{E}(\tau|\eta) \qquad \text{(Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes,} \\
&\qquad\qquad\qquad \eta \text{ ist } \mathcal{D}_\eta\text{-meßbar)} \\
&= \eta\mathbf{E}\tau \qquad \text{(}\tau \text{ und } \eta \text{ sind unabhängig)} \\
&= \eta \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\xi &= \mathbf{E}\tau\eta \\
&= \mathbf{E}\tau\mathbf{E}\eta \quad \text{(da } \tau, \eta \text{ unabhängig)} \\
&= 0 \cdot \mathbf{E}\eta \\
&= 0
\end{aligned}$$

<u>*Beispiel 2*</u>

Sei D wie folgt gegeben:



Sei (ξ, η) ein im Dreieck D gleichverteilter Zufallsvektor, d. h.

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{Inhalt}(D)} = 1 & \text{für } x, y \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

- ξ und η sind abhängig, so wird z. B. für große $|\xi| \leq 1$ der Wertebereich von η : $[0, 1 - |\xi|]$ klein.
  Für $x, y \in D$ gilt $f_{\xi\eta}(x, y) \neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, denn:

$$f_{\xi\eta}(x, y) = 1 \qquad \text{aber}$$

$$f_\xi(x) = \int_0^{1-|x|} 1\,dy = 1-|x|$$
$$f_\eta(y) = \int_{-(1-y)}^{1-y} 1\,dx = 2(1-y)$$

- Es gilt $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}\xi$:
  $\mathbf{E}(\xi|\eta) = 0$, denn $\mathbf{E}(\xi|\eta = y) = 0\ \forall y$ (Symmetrie).
  $\mathbf{E}\xi = \int_{-1}^{1} x f_\xi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-|x|)x\,dx = 0$, da $(1-|x|)x$ eine ungerade Funktion ist.

10.3. vgl. auch Lösung zu Aufgabe 9.4

$$\mathbf{E}(\eta_1|\xi_1) = \mathbf{E}(\xi_1+\xi_2|\mathfrak{A}_{\xi_1}) = \mathbf{E}(\xi_1|\mathfrak{A}_{\xi_1}) + \mathbf{E}(\xi_2|\mathfrak{A}_{\xi_1})$$

$$\mathbf{E}(\xi_1|\mathfrak{A}_{\xi_1}) = \xi_1 \qquad \text{da } \xi_1 \text{ meßbar bzl. } \mathfrak{A}_{\xi_1} \text{ ist.}$$

$$\mathbf{E}(\xi_2|\mathfrak{A}_{\xi_1}) = \mathbf{E}\xi_2 \qquad \text{da } \xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ unabhängig sind.}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{E}(\eta_1|\xi_1) = \xi_1 + \mathbf{E}\xi_2 = \xi_1$$

Analog folgt:

$$\mathbf{E}(\eta_2|\xi_1) = \mathbf{E}(\xi_1-\xi_2|\mathfrak{A}_{\xi_1}) = \mathbf{E}(\xi_1|\mathfrak{A}_{\xi_1}) - \mathbf{E}(\xi_2|\mathfrak{A}_{\xi_1}) = \xi_1$$

$\mathbf{E}(\eta_1|\xi_1)$ und $\mathbf{E}(\eta_2|\xi_1)$ sind also genau dann unabhängig, wenn ξ_1 und ξ_1 unabhängig sind. Das ist jedoch nur der Fall, wenn $\xi_1 \equiv \text{const}$.

10.4. Geg.: $\xi_1, \ldots, \xi_n$ i.i.d., $\mathbf{E}\xi_i = \mathbf{E}\xi_1 < \infty$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$

Beh.: $\mathbf{E}(\xi_1|S_n) = \frac{S_n}{n}$

Interpretation:
Nach dem Gesetz der großen Zahlen (wird später behandelt) gilt für $n \to \infty$: $\frac{S_n}{n} \to \mathbf{E}\xi_1$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{bzw. für } n < \infty: & \frac{S_n}{n} & \approx & \mathbf{E}\xi_1 \\ \text{Exakt:} & \mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) & = & \mathbf{E}\xi_1 \\ \text{oder} & \frac{S_n}{n} & = & \mathbf{E}(\xi_1|S_n) \end{array}$$

Beweis der Behauptung:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \\
S_n &= \mathbf{E}(S_n|S_n) && \text{(Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes)} \\
&= \mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\middle| S_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_i|S_n) \\
&= n \cdot \mathbf{E}(\xi_1|S_n) && \text{(Da } \xi_1, \ldots, \xi_n \text{ identisch verteilt sind.)} \\
& && \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{E}(\xi_1|S_n) = \frac{S_n}{n}}}
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Auf die Voraussetzung der Unabhängigkeit von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ kann verzichtet werden.

10.5. Geg.: $\xi_1, \ldots, \xi_n$ i.i.d.
τ von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ unabhängig, $\tau \in \{1, \ldots, n\}$
$S_\tau = \sum_{k=1}^{\tau} \xi_k$ (zufällig gestoppte Summe, ↗ Bedeutung in sequentieller Statistik)

Beh.: $\mathbf{E}(S_\tau|\tau) = \tau \mathbf{E}\xi_1$
$\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}\tau\mathbf{E}\xi_1$

Beweis:
Schreiben $S_\tau = \sum_{k=1}^{\tau} \xi_k$ als $S_\tau = \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{\tau \geq k\}}$ mit $I_{\{\tau \geq k\}} = \begin{cases} 1 & \tau \geq k \\ 0 & \tau < k \end{cases}$
Dann gilt:

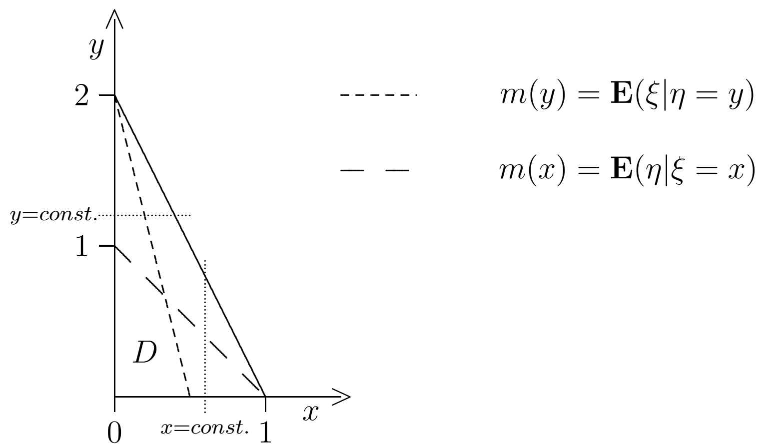
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S_\tau|\tau) &= \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{\tau \geq k\}}\middle| \tau\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_k I_{\{\tau \geq k\}}|\tau) && \text{(Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} I_{\{\tau \geq k\}} \mathbf{E}(\xi_k|\tau) && (I_{\{\tau \geq k\}} \text{ ist } \mathcal{D}_\tau\text{-meßbar, konstant auf den Atomen von } \mathcal{D}_\tau = \sigma(\{\tau = 1\}, \ldots, \{\tau = n\}).) \\
&= \sum_{k=1}^{n} I_{\{\tau \geq k\}} \mathbf{E}\xi_k && (\xi_k \text{ und } \tau \text{ sind unabhängig.}) \\
\mathbf{E}(S_\tau|\tau) &= \tau \cdot \mathbf{E}\xi_1 && (\xi_k \text{ identisch verteilt, } \textstyle\sum_{k=1}^{n} I_{\{\tau \geq k\}} = \tau.)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Für den Beweis der zweiten Behauptung werden zwei Möglichkeiten angegeben:

- $$\mathbf{E}S_\tau = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}(S_\tau|\tau)\right] = \mathbf{E}\left[\tau \cdot \mathbf{E}\xi_1\right] = \mathbf{E}\tau\mathbf{E}\xi_1$$

- $$\begin{aligned}
\mathbf{E}S_\tau &= \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{\tau\geq k\}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\xi_k I_{\{\tau\geq k\}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\xi_k \mathbf{E}I_{\{\tau\geq k\}} \qquad (\xi_k \text{ und } \tau \text{ sind unabhängig.}) \\
&= \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\sum_{k=1}^{n} I_{\{\tau\geq k\}} \\
&= \mathbf{E}\xi_1\mathbf{E}\tau
\end{aligned}$$

10.6. <u>*Skizze:*</u>



(a)

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} c & (x,y)\in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmung von c:

$$1 = \iint\limits_D f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy = c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = c$$

$\Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$

(b)

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{2-2x} dy = 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^{1-y/2} dy = 1-\frac{y}{2} & 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2t-t^2\big|_0^x = 2x-x^2 & 0 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} f_\eta(t)\,dt = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ t-\frac{t^2}{4}\Big|_0^y = y-\frac{y^2}{4} & 0 < y \le 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

(c) Sei $x \in [0,1]$ und $y \in [0,2]$.

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-y/2} = \frac{2}{2-y} = const & x \in \left[0, 1-\frac{y}{2}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Probe: } \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx = \int_0^{1-y/2} \frac{1}{1-y/2}\,dx = \frac{1-y/2}{1-y/2} = 1$$

$$f_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_\xi(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2x} = const & y \in [0, 2-2x] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(d) Sei $x \in [0,1]$ und $y \in [0,2]$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\xi|\eta = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi|\eta}(x|y)\,dx = \int_{0}^{1-y/2} x \cdot \frac{1}{1-y/2}\,dx \\
&= \frac{1}{1-y/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{2-y}{4} \\
&= m(y) \qquad \text{(siehe Skizze)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\eta|\xi = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta|\xi}(y|x)\,dy = \int_{0}^{2-2x} y \cdot \frac{1}{2-2x}\,dy \\
&= \frac{1}{2-2x} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2-2x)^2 = 1 - x \\
&= m(x) \qquad \text{(siehe Skizze)}
\end{aligned}$$

(e)

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = \frac{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = \frac{\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}}$$

$$\mathbf{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 x(2-2x)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

oder auch:

$$\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\mathbf{E}(\xi|\eta) = \int_0^2 \mathbf{E}(\xi|\eta = y) f_\eta(y)\,dy = \cdots = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{E}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,dy = \int_0^2 y\left(1 - \frac{y}{2}\right)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^2 = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3}$$

oder auch:

$$\mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\mathbf{E}(\eta|\xi) = \int_0^1 \mathbf{E}(\eta|\xi = x) f_\xi(x)\,dx = \cdots = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{E}\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 x^2(2-2x)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{E}\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_\eta(y)\,dy = \int_0^2 y^2\left(1 - \frac{y}{2}\right)\,dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8}\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\mathbf{D}\eta = \mathbf{E}\eta^2 - (\mathbf{E}\eta)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\xi\eta &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} xy\cdot 1\,dy\right] dx \\
&= \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-2x}\right) dx = 2\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = 2\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx \\
&= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{9}}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

11 Funktionen von Zufallsgrößen

11.1. Sei

ξ — Kantenlänge des Würfels, $\xi \sim \mathcal{U}[0,a]$

η — Volumen des Würfels, $\eta = \varphi(\xi) = \xi^3$

Für die Verteilungs- und Dichtefunktion von ξ gilt:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & x \in [0,a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{a} & 0 < x \le a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

Gesucht sind die Verteilungsdichte $f_\eta(y)$ sowie der Erwartungswert $\mathbf{E}\eta$.
Im folgenden werden jeweils zwei alternative Lösungsmöglichkeiten dargestellt.

- $$F_\eta(y) = P(\eta \le y) = P(\xi^3 \le y) = P(\xi \le \sqrt[3]{y}) = F_\xi(\sqrt[3]{y})$$

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= F'_\eta(y) = F'_\xi(\sqrt[3]{y}) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{\sqrt[3]{y}}{a}\right)' = \frac{1}{3a\sqrt[3]{y^2}} & y \in (0, a^3] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

- $$\eta = \varphi(\xi), \qquad \xi = \varphi^{-1}(\eta) \doteq h(\eta) = \sqrt[3]{\eta}$$

φ ist streng monoton wachsend auf $(0,a]$.

Für $y \notin (0,a^3]$ gilt $f_\eta(y) = 0$.

$$y \in (0,a^3]: \quad f_\eta(y) = f_\xi(h(y)) \cdot |h'(y)| = \frac{1}{a} \cdot \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\right| = \frac{1}{3a\sqrt[3]{y^2}}$$

- $$\begin{aligned} \mathbf{E}\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,dy \\ &= \int_0^{a^3} \frac{y}{3a\sqrt[3]{y^2}}\,dy \\ &= \frac{1}{3a}\int_0^{a^3} \sqrt[3]{y}\,dy \\ &= \frac{a^3}{4} \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\eta &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 f_\xi(x)\,dx \\ &= \int\limits_0^a \frac{x^3}{a}\,dx \\ &= \frac{a^3}{4}\end{aligned}$$

  Der Erwartungswert des Würfelvolumens beträgt also ein Viertel des maximal ereichbaren Volumens.

11.2. Wir betrachten $\eta = \varphi(\xi) = F_\xi(\xi)$.
Die Werte von η liegen also im Intervall $[0,1]$.

$$\begin{aligned}F_\eta(y) &= P(\eta \leq y) \\ &= P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) && \text{(da } \varphi \text{ als Verteilungsfunktion monoton ist)} \\ &= F_\xi(\varphi^{-1}(y)) \\ &= F_\xi(F_\xi^{-1}(y)) \\ &= y && y \in [0,1]\end{aligned}$$

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = 1 \qquad y \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ Gleichverteilung auf $[0,1]$.

Im folgenden wird ein zweiter Lösungsweg angegeben, hier muß jedoch vorausgesetzt werden, daß F_ξ *streng* monoton wächst, d. h. $f_\xi(x) > 0 \quad \forall x$.

Dann gilt für $y \in [0,1]$ mit $x = h(y) = \varphi^{-1}(y) = F_\xi^{-1}(y)$

$$h'(y) = \left(\varphi^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{1}{F'_\xi(x)} = \frac{1}{f_\xi(x)}$$

und damit

$$\begin{aligned}f_\eta(y) &= f_\xi(h(y)) \cdot |h'(y)| \\ &= f_\xi(x) \cdot \frac{1}{f_\xi(x)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Bemerkung:

Die in der Aufgabe dargestellte Tatsache findet z. B. bei der Erzeugung von Zufallszahlen eine Anwendung:

Gegeben sei ein Generator für gleichverteilte Zufallszahlen $\eta \sim \mathcal{U}[0,1] \quad (y = \mathit{Random})$.
Zu erzeugen sei eine Zufallsgröße ξ mit der Verteilungsfunktion F_ξ.
Vorgehensweise:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & y & \doteq & \mathit{Random} \\ 2. & x & \doteq & F_\xi^{-1}(y) \end{array}$$

11.3. Geg.: $\xi, \eta \sim \mathcal{U}[0,1]$ unabhängig.
Ges.: Verteilung von $\nu = \xi + \eta$ und $\tilde{\nu} = 2\xi$.

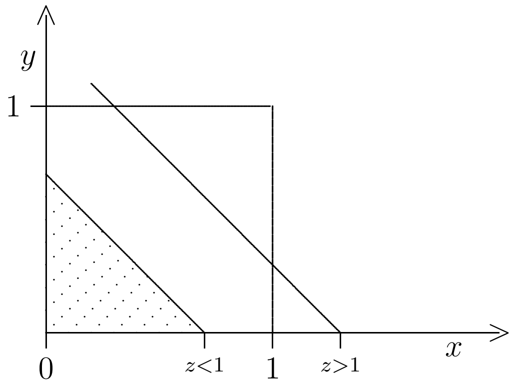
Offenbar gilt für die Verteilung von $\tilde{\nu}$: $\tilde{\nu} \sim \mathcal{U}[0,2]$.

Für die Bestimmung der Verteilung von ν werden wiederum zwei alternative Lösungsvorschläge angegeben:

-

$$\begin{aligned} F_\nu(z) &= P(\nu \le z) = P(\xi + \eta \le z) \\ &= \iint\limits_{\substack{x+y \le z \\ 0 \le x,y \le 1}} f_{\xi\eta}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \iint\limits_{\substack{x+y \le z \\ 0 \le x,y \le 1}} f_\xi(x) f_\eta(y)\, dx\, dy \qquad \text{(Unabhängigkeit)} \end{aligned}$$

Für $0 \le x, y \le 1$ gilt $f_\xi(x) = f_\eta(y) = 1$.
Aus der folgenden Skizze kann dann das Ergebnis abgelesen werden (man betrachte die ensprechenden Flächeninhalte).



Damit erhält man

$$F_\nu(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{z^2}{2} & 0 < z \le 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & 1 < z \le 2 \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$

und

$$f_\nu(z) = F'_\nu(z) = \begin{cases} z & 0 < z \le 1 \\ 2-z & 1 < z \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

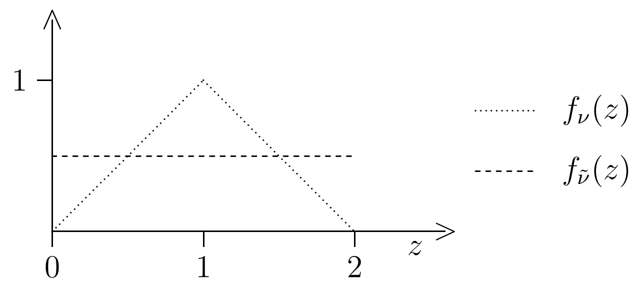
- ξ, η unabhängig $\Rightarrow F_\nu = F_\xi * F_\eta$ (Faltung)

$$F_\nu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(z-x)\, dF_\eta(x)$$

$$f_\nu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z-x) f_\eta(x)\, dx$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \int_0^z 1 \cdot 1\, dx = z & 0 < z \le 1 \\ \int_{z-1}^1 1 \cdot 1\, dx = 2-z & 1 < z \le 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

(Für das Integrationsgebiet muß jeweils gelten: $x, z-x \in [0,1]$.)
Die nachfolgende Skizze zeigt nochmals die Verteilungsdichten von f_ν und $f_{\tilde{\nu}}$.



11.4. Geg.: $\xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, ξ_1, ξ_2 unabhängig
Ges.: Verteilung von $\eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$

Die Werte von η liegen also in $[0, \infty)$.

Vgl. Vorlesung, 22.1., Beispiel 8:
$\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, unabhängig, $\chi_n^2 = \tilde{\xi}_1^2 + \cdots + \tilde{\xi}_n^2$
Hier speziell für $n = 2$, Verallgemeinerung auf $\xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Es gilt $(y > 0)$:

$$f_{\chi_n^2}(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, y^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{2}\right)}$$

$$f_{\sqrt{\chi_n^2}}(y) = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, y^{n-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}$$

Speziell für $n = 2$:

$$f_{\chi_2^2}(y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{y}{2}\right)}$$

$$f_{\sqrt{\chi_2^2}}(y) = y\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{y^2}{2}\right)}$$

mit $\chi_2^2 = \tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2, \quad \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Setzen nun $\xi_i \doteq \sigma\tilde{\xi}_i \quad \Rightarrow \quad \xi_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

$\Rightarrow \quad \eta = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \sigma\sqrt{\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{\xi}_2^2} = \sigma\sqrt{\chi_2^2}$

Betrachten also die Transformation $\eta = \varphi\left(\sqrt{\chi_2^2}\right) = \sigma\sqrt{\chi_2^2}$.

$$\varphi(x) = \sigma x, \quad h(y) = \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sigma}, \quad h'(y) = \frac{1}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= f_{\sqrt{\chi_2^2}}(h(y)) \cdot |h'(y)| \\ &= f_{\sqrt{\chi_2^2}}\left(\frac{y}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} \\ &= \frac{y}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad y > 0 \qquad \text{(Rayleigh-Verteilung)} \end{aligned}$$

Erwartungswert:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\eta &= \int\limits_0^\infty y f_\eta(y)\,dy \\
&= \int\limits_0^\infty y\frac{y}{\sigma^2}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)} dy && \text{mit } z = \frac{y^2}{2\sigma^2} \Rightarrow dz = \frac{y}{\sigma^2}\,dy \\
& && y = \sigma\sqrt{2z} \Rightarrow dy = \frac{\sigma}{\sqrt{2z}}\,dz \\
&= \int\limits_0^\infty 2z\mathrm{e}^{-z}\frac{\sigma}{\sqrt{2z}}\,dz \\
&= \sqrt{2}\sigma \int\limits_0^\infty z^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-z}\,dz \\
&= \sqrt{2}\sigma\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}\sigma\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma
\end{aligned}
$$

12 Konvergenzbegriffe

12.1. $F_{\eta_n}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0.$

(a) Sei $(\xi_n) = \left(\frac{\eta_n}{\ln n}\right)$.

- Zu zeigen ist: $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, d. h. $P(|\xi_n - 0| > \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall \varepsilon > 0$.
  Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
  Es ist

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - 0| > \varepsilon) &= P(\xi_n > \varepsilon) = P\left(\frac{\eta_n}{\ln n} > \varepsilon\right) = P(\eta_n > \varepsilon \ln n) \\ &= 1 - F_{\eta_n}(\varepsilon \ln n) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon \ln n} \\ &= n^{-\lambda\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{da } \lambda\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

- Zu zeigen ist: es gilt nicht $\xi_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$.
  $\xi_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \Longleftrightarrow P(\omega : \xi_n \not\to 0) = 0$.
  Nach Folgerung 3 aus dem Lemma von *Borel-Cantelli* gilt:

$$P(\omega : \xi_n \not\to \xi) = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \infty$$

  Hier gilt speziell:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\xi_n - 0| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda\varepsilon} = \begin{cases} \infty & \lambda\varepsilon \leq 1 \\ \text{endlich} & \lambda\varepsilon > 1 \end{cases}$$

  Die Reihe divergiert also für hinreichend kleine ε ($\varepsilon \leq \frac{1}{\lambda}$).
  Folglich gilt nicht $\xi_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$.

(b) Sei $(\xi_n) = \left(\frac{\eta_n}{(\ln n)^2}\right)$.

- Zu zeigen ist: $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, d. h. $P(|\xi_n - 0| > \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall \varepsilon > 0$.
  Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
  Es ist

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - 0| > \varepsilon) &= P(\xi_n > \varepsilon) = P\left(\frac{\eta_n}{(\ln n)^2} > \varepsilon\right) = P(\eta_n > \varepsilon(\ln n)^2) \\ &= 1 - F_{\eta_n}(\varepsilon(\ln n)^2) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon(\ln n)^2} \\ &= n^{-\lambda\varepsilon \ln n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

- Zu zeigen ist: $\xi_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$, d. h. $P(\omega : \xi_n \not\to 0) = 0$.
  Nach Folgerung 3 aus dem Lemma von *Borel-Cantelli* gilt:

$$P(\omega : \xi_n \not\to \xi) = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \infty$$

Hier gilt speziell:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\xi_n - 0| \geq \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda\varepsilon \ln n} < \infty$$

(Vgl.: $M \doteq \mathrm{e}^{\frac{2}{(\lambda\varepsilon)}} \Rightarrow \lambda\varepsilon \ln n \geq 2 \quad \forall n \geq M \Rightarrow \sum\limits_{n=M}^{\infty} n^{-\lambda\varepsilon \ln n} \leq \sum\limits_{n=M}^{\infty} n^{-2} < \infty$.)

Folglich gilt $\xi_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$.

12.2. (a) Vor.: $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, also $\quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall \varepsilon > 0$
$\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$, also $\quad P(|\xi_n - \eta| > \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall \varepsilon > 0$
Beh.: $\xi \sim \eta$, also $\quad P(\xi \neq \eta) = P(\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)) = 0$
Folgende grundlegende Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten werden im Beweis wiederholt verwendet:

- Aus $A \subseteq B$ folgt $P(A) \leq P(B) \quad \forall A, B \in \mathfrak{A}$.
- Es gilt $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \forall A, B \in \mathfrak{A}$.

Beweis: (indirekt)
Gegenannahme: $P(\xi \neq \eta) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon, \delta > 0 : P(|\xi - \eta| > \varepsilon) > \delta$

- Es gilt:

$$\begin{aligned} P(|\xi - \eta| > \varepsilon) &= P(|(\xi - \xi_n) + (\xi_n - \eta)| > \varepsilon) \\ &\leq P(|\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta| > \varepsilon) \end{aligned}$$

denn aus

$$\varepsilon < |(\xi - \xi_n) + (\xi_n - \eta)| \leq |\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta|$$

folgt

$$\{\omega : |(\xi - \xi_n) + (\xi_n - \eta)| > \varepsilon\} \subseteq \{\omega : |\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta| > \varepsilon\}$$

- Weiter gilt:

$$P(|\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta| > \varepsilon) \leq P\left(|\xi - \xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\xi_n - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

denn aus $|\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta| > \varepsilon$ folgt $|\xi - \xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}$ oder $|\xi_n - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}$,
und damit

$$\{\omega : |\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta| > \varepsilon\} \subseteq \left\{\omega : |\xi - \xi_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega : |\xi_n - \eta| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

- Haben also

$$P(|\xi-\eta|>\varepsilon)\leq P\left(|\xi-\xi_n|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|\xi_n-\eta|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

- Wegen $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ und $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$ folgt, daß $\forall\delta>0$ ein $n_0=n_0(\varepsilon)$ existiert, so daß $\forall n>n_0$ gilt:

$$P\left(|\xi-\xi_n|>\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\delta}{2}\quad\text{und}\quad P\left(|\xi_n-\eta|>\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{\delta}{2}$$

- Also ergibt sich schließlich

$$P(|\xi-\eta|>\varepsilon)<\delta\quad\forall\varepsilon,\delta>0$$

was ein Widerspruch zur in der Gegenannahme formulierten Behauptung ist.

(b) Vor.: $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$, also $\quad P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)\to 0\quad (n\to\infty)\quad\forall\varepsilon>0$
$\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$, also $\quad P(|\eta_n-\eta|>\varepsilon)\to 0\quad (n\to\infty)\quad\forall\varepsilon>0$
$a,b\in\mathbb{R}$

Beh.: $a\xi_n+b\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a\xi+b\eta$, also
$P(|a\xi_n+b\eta_n-(a\xi+b\eta)|>\varepsilon)\to 0\quad (n\to\infty)\quad\forall\varepsilon>0$

Beweis: (indirekt)

Der Beweis stützt sich auf die selben Aussagen wie in Teilaufgabe 12.2a, auf die ausführliche Begründung der Schritte wird deshalb verzichtet.

Gegenannahme: $\exists\varepsilon,\delta>0: P(|a\xi_n+b\eta_n-(a\xi+b\eta)|>\varepsilon)>\delta\quad\forall n$

Für $a=0$ oder $b=0$ gilt die Behauptung offenbar. Sei also im weiteren $a\neq 0$ und $b\neq 0$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&P(|a\xi_n+b\eta_n-(a\xi+b\eta)|>\varepsilon)\\
&\qquad= P(|a(\xi_n-\xi)+b(\eta_n-\eta)|>\varepsilon)\\
&\qquad\leq P(|a||\xi_n-\xi|+|b||\eta_n-\eta|>\varepsilon)\\
&\qquad\leq P\left(|\xi_n-\xi|>\frac{\varepsilon}{2|a|}\right)+P\left(|\eta_n-\eta|>\frac{\varepsilon}{2|b|}\right)
\end{aligned}$$

Wegen $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ und $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \eta$ folgt, daß $\forall\delta>0$ ein $n_0=n_0(\varepsilon)$ existiert, so daß $\forall n>n_0$ gilt:

$$P\left(|\xi-\xi_n|>\frac{\varepsilon}{2|a|}\right)<\frac{\delta}{2}\quad\text{und}\quad P\left(|\eta_n-\eta|>\frac{\varepsilon}{2|b|}\right)<\frac{\delta}{2}$$

Also ergibt sich schließlich: $\forall\varepsilon,\delta>0\quad\exists n_0$, so daß

$$P(|a\xi_n+b\eta_n-(a\xi+b\eta)|>\varepsilon)<\delta\quad\forall n>n_0$$

was ein Widerspruch zur in der Gegenannahme formulierten Behauptung ist.

12.3. Zur Lösung dieser Aufgabe ist ein Vorgriff auf die Vorlesung zweckmäßig, indem das Starke Gesetz der Großen Zahlen verwendet wird.
Schon bekannt ist das Schwache Gesetz der Großen Zahlen:
Sei (η_n) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathbf{E}|\eta_1| < \infty$, sei $\xi_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i$.
Dann gilt: $\xi_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}\eta_1$, also $P(|\xi_n - \mathbf{E}\eta_1| > \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall \varepsilon > 0$
Das Starke Gesetz der Großen Zahlen (*Kolmogorov*) besagt, daß unter den gleichen Voraussetzungen an die η_i sogar gilt:
$\xi_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbf{E}\eta_1$, also $P(\omega : \xi_n \not\to \mathbf{E}\eta_1) = 0$.
Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}
\xi_n &= \left(\frac{1}{\eta_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\eta_n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \eta_i\right)
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die η_i unabhängige, auf dem Intervall (0,1) gleichverteilte Zufallsgrößen.
Dann gilt:

$$\mathbf{E}\ln \eta_1 = \int\limits_0^1 \ln x \cdot 1\, dx = (x \ln x - x)|_0^1 = -1$$

Wir können also das Starke Gesetz der Großen Zahlen für $\widetilde{\eta_i} = \ln \eta_i$ anwenden und erhalten:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \eta_i \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbf{E}\ln \eta_1$$

und schließlich

$$\xi_n = \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \eta_i\right) \xrightarrow{\text{f.s.}} \exp\left(-\mathbf{E}\ln \eta_1\right) = \exp(-(-1)) = \mathrm{e}$$

12.4. Vor.: $f(x)$ stetig auf $[0,1]$ (also dort auch glm. stetig).
$f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Beh.: $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ glm.
d. h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$

Zunächst die Beweisidee:

Sei (ξ_n) eine Folge von i.i.d. $B(1,x)$-verteilten Zufallsgrößen.
Dann gilt:
$S_n \doteq \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim B(n,x)$
$P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \doteq p_k, \quad k = 0, \ldots, n$
$\mathbf{E}S_n = nx, \quad \mathbf{D}S_n = nx(1-x)$

Für die Zufallsgröße $\frac{S_n}{n}$ gilt dann:
$P\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = p_k$
$\mathbf{E}\frac{S_n}{n} = x$
$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} x$ (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Es ist

$$\mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} p_k f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = f_n(x)$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &\xrightarrow{\mathbf{P}} x && \text{(Schwaches Gesetz der großen Zahlen)} \\ f\left(\frac{S_n}{n}\right) &\xrightarrow{\mathbf{P}} f(x) && \text{(Da } f \text{ stetig ist.)} \\ \mathbf{E}f\left(\frac{S_n}{n}\right) &\longrightarrow \mathbf{E}f(x) = f(x) && \text{(Noch zu zeigen, s. u.)} \end{aligned}$$

Beweis:

$f(x)$ glm. stetig auf $[0,1] \quad \Longrightarrow$

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für $|x - y| \leq \delta$
- $\exists M < \infty : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [0,1]$

Also

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \mathbf{E} f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \\
&= \left| \mathbf{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} p_k \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} p_k \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \\
&= \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\delta} p_k \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}_{\leq\varepsilon \text{ (f glm. stetig)}} + \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta} p_k \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}_{\leq 2M \text{ (f beschr. auf $[0,1]$)}} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\delta} p_k + 2M \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta} p_k \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} p_k + 2M \sum_{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta} p_k \\
&= \varepsilon + 2M \underbrace{P(|S_n - nx| > n\delta)}_{\substack{\leq \frac{\mathbf{D}S_n}{(n\delta)^2} \\ \text{(Tschebyschev)}}} \\
&\leq \varepsilon + 2M \frac{\mathbf{D}S_n}{(n\delta)^2} \\
&= \varepsilon + 2M \frac{n \overbrace{x(1-x)}^{\leq\frac{1}{4}}}{(n\delta)^2} \\
&\leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} \quad < \tilde{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0
\end{aligned}
$$

Dabei ist $n_0 = n_0(\varepsilon, M, \delta)$ durch f bestimmt und unabhängig von x.

Wir haben also gezeigt:

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \tilde{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_0$$

Also konvergiert $f_n(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

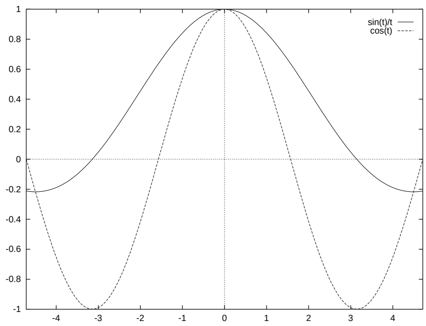
13 Charakteristische Funktionen

13.1. • $\varphi_\xi(t)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) &= \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^{itx}\cdot\frac{1}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\cos tx + i\sin tx)\,dx \qquad \left(\int_{-1}^{1} i\sin tx\,dx = 0 \text{ da ungerade Fkt.}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\sin tx}{t}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{\sin t - \sin(-t)}{2t} \\
\varphi_\xi(t) &= \frac{\sin t}{t} \qquad \left(\text{ für } t=0 \text{ gilt: } \varphi_\xi(0) = \mathbf{E}e^0 = 1 = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)
\end{aligned}$$

• $\varphi_\eta(t)$: (η = zufälliges Vorzeichen)

$$\begin{aligned}
\varphi_\eta(t) &= \mathbf{E}e^{it\eta} = e^{it\cdot 1}\cdot\frac{1}{2} + e^{it\cdot -1}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\cos t + i\sin t) + \frac{1}{2}\cdot(\cos(-t) + i\sin(-t)) \\
\varphi_\eta(t) &= \cos t
\end{aligned}$$



• $\varphi_{\nu_n}(t)$:

$$\nu_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{2^k} = \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{4} + \cdots + \frac{\eta_n}{2^n} \qquad \left(\overset{z.B.}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

Die Werte von ν_n sind endliche Dualbrüche im Intervall [-1,1], betrachten:

$$\nu_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\eta_k}{2^k} \qquad \nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu \text{ unendliche Dualbrüche}$$

bestimmen φ_{ν_n}, untersuchen $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\nu_n}(t) \stackrel{?}{=} \varphi_\nu(t)$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\nu_n}(t) &= \varphi_{\sum_{k=1}^n \frac{\eta_k}{2^k}}(t) \underset{\text{Unabhängigkeit}}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{\frac{\nu_k}{2^k}}(t) \\
\varphi_{\nu_n}(t) &\underset{\varphi_{a\eta}(t)=\varphi_\eta(at)}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \cos\frac{t}{2^k} \\
\Rightarrow \varphi_{\nu_n}(t) &\to \varphi_{\tilde\nu}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\varphi_{\tilde\nu}(t)$ ist stetig für $t = 0$

$\varphi_{\tilde\nu}(t) \equiv \varphi_\xi$

Aus dem Stetigkeitssatz der Vorlesung und dessen Folgerungen erhält man:

$$\nu_n \xrightarrow{\text{d}} \xi \qquad \text{(Konvergenz in Verteilung)}$$

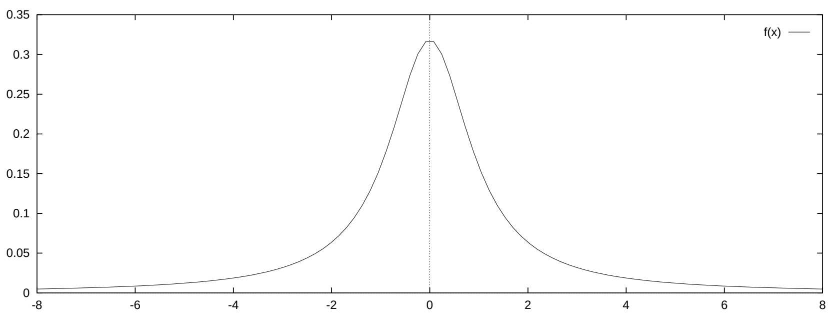
$\Rightarrow$ zufällige unendliche Dualbrüche sind gleichmäßig in [-1,1] verteilt

$$\underset{\text{diskret}}{\nu_n} \xrightarrow{\text{d}} \underset{\text{absolut stetig}}{\xi}$$

Begründung des Hinweises:

$$\begin{aligned}
\sin t &= 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} \\
\Rightarrow \frac{\sin t}{t} &= \cos\frac{t}{2}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \cos\frac{t}{2}\cdot\left(\cos\frac{t}{4}\cdot\frac{\sin\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}\right) \\
&\vdots \\
&= \prod_{k=1}^\infty \cos\frac{t}{2^k}
\end{aligned}$$

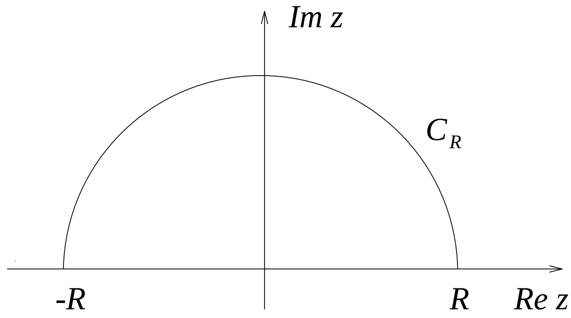
13.2. (a) Dichtefunktion $f_\xi = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$



Verteilung ist symmetrisch $\Rightarrow \varphi_\xi(t)$ ist reell,
da $\varphi_\xi(t) = \overline{\varphi_\xi(-t)} = \varphi_\xi(-t)$ $\quad \varphi_\xi(t)$ ist gerade

$$\varphi_\xi(t) \quad = \quad \mathbf{E}e^{it\xi} \quad = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{itx}}{1+x^2}}_{g(x)}\,dx$$

-Der Integrand $g(x)$ ist eine komplexwertige Funktion mit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$.
Wir betrachten $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ wobei $x = \mathrm{Re}\ z$



Idee: (i) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} g(z)\,dz$

(ii) $\int\limits_{-R}^{R} g(z)\,dz + \int\limits_{C_R} g(z)\,dz = \oint g(z)\,dz$

(iii) berechnen $\oint g(z)\,dz$ mit Residuensatz

(iv) zeigen $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} g(z)\,dz = 0 \quad (t \geq 0)$

(v) $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\oint g(z)\,dz & t \geq 0 \\ \varphi_\xi(-t) & t \leq 0 \end{cases}$

zu (iii)
$$\begin{aligned}
\oint g(z)\,dz &= 2\pi i \sum_n \mathcal{R}es(g(z), z_n) \\
&= 2\pi i\, \mathcal{R}es(g(z), i) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)g(z) \qquad (g(z) \text{ hat in } z=i \text{ Pol 1. Ordnung}) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{itz}}{(z+i)(z-i)} \\
&= 2\pi i \frac{e^{iti}}{i+i} = \pi e^{-t}
\end{aligned}$$

zu (iv) $(t \geq 0)$

$$\left| \int_{C_R} g(z)\,dz \right| \leq \int_{C_R} |g(z)|\,dz \leq \underbrace{\pi R}_{\text{“Länge” von } C_R} \sup_{z\in C_R} |g(z)|$$

Schätzen nun $|g(z)|$ ab:
$$\begin{aligned}
|g(z)| &= \left|\frac{e^{itz}}{1+z^2}\right| \\
&= \left|\frac{e^{it(\mathrm{Re}\ z + i\mathrm{Im}\ z)}}{1+z^2}\right|
\end{aligned}$$

$\mathrm{Re}\ z = R\cos\varphi \quad \mathrm{Im}\ z = R\sin\varphi \quad \varphi\epsilon[0,\pi]$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|e^{itR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right| &\leq \left|e^{itR\cos\varphi}\right| \cdot \left|e^{itiR\sin\varphi}\right| \\
&= 1 \cdot \left|e^{-tR\sin\varphi}\right| \\
&\leq 1 \cdot 1
\end{aligned}$$

für $|z| = R$ ist $|1+z^2| \geq R^2 - 1 \quad (R > 1)$

$$\Rightarrow |g(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{C_R} g(z)\,dz \right| \leq \pi R \frac{1}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

zu (v)
$$\begin{aligned}
(t \geq 0): \quad \varphi_\xi(t) &= \frac{1}{\pi}\oint g(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\cdot \pi e^{-t} = e^{-t} \\
(t < 0): \quad \varphi_\xi(t) &= e^{-(-t)} = e^t = e^{-|t|} \\
\Rightarrow \quad \varphi_\xi(t) &= e^{-|t|}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(t) &= \varphi_{\frac{1}{n}\sum\xi_k}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{\frac{\xi_k}{n}}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_\xi\left(\frac{t}{n}\right)\\ &= \left(\varphi_\xi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\right)^n = e^{-|t|} = \varphi_\xi(t)\end{aligned}$$

d.h. die Bildung des arithmetischen Mittels ändert die Verteilung von ξ nicht

$$\frac{1}{n}\sum\xi_k \not\to \mathbf{E}\xi \quad \text{denn} \quad \nexists\,\mathbf{E}\xi \quad \left(\text{vgl. } \mathbf{E}\xi = \frac{\varphi'(0)}{i} \quad \nexists\,\varphi'(0)\right)$$

13.3. $f_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \lambda > 0$

es gilt: $\mathbf{E}\xi^k = \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}$ für $k = 1, 2, \ldots, n,$ wenn $\mathbf{E}|\xi|^n < \infty$

überprüfen Voraussetzung:

$$\mathbf{E}|\xi|^n = \mathbf{E}\xi^n = \int_0^\infty x^n\lambda e^{-\lambda x}\,dx \underset{z=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty z^n e^{-z}\,dz = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^n} < \infty$$

Die Momente wurden hiermit schon berechnet; vergleichen nun mit charakteristischer

Funktion

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) \;=\; \mathbf{E}e^{it\xi} &= \int_0^\infty e^{itx}\lambda\, e^{-\lambda x}\,dx \;=\; \lambda\int_0^\infty e^{(it-\lambda)x}\,dx \\
&= \frac{\lambda}{it-\lambda}\,e^{(it-\lambda)x}\Big|_0^\infty \;=\; \frac{\lambda}{it-\lambda}\cdot[0-1] \;=\; \frac{\lambda}{\lambda-it}
\end{aligned}
$$

$$\text{denn } e^{(it-\lambda)x} = e^{-\lambda x}e^{it} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\cdot e^{it} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(k)}(t) &= \lambda\cdot\left[(\lambda-it)^{-1}\right]^{(k)} \;=\; \lambda\cdot\left[(-1)(\lambda-it)^{-2}\cdot(-i)\right]^{(k-1)} \\
&\;\;\vdots \\
&= \lambda\left[(-1)\cdot(-2)\ldots(-k)\cdot(-i)^k\cdot(\lambda-it)^{-(k+1)}\right] \\
&= \lambda\; k!\; i^k\cdot(\lambda-it)^{-(k+1)} \\
\varphi^{(k)}(0) &= \lambda\; k!\; i^k\cdot(\lambda)^{-(k+1)} \;=\; \frac{k!\cdot i^k}{\lambda^k} \\
\mathbf{E}\xi^k &= \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k} \;=\; \frac{k!}{\lambda^k} \\
\text{speziell:}\quad \mathbf{E}\xi &= \frac{1}{\lambda},\quad \mathbf{E}\xi^2 \;=\; \frac{2}{\lambda^2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{D}\xi \;=\; \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

13.4. Vor.: ξ ganzzahlige Zufallsgröße: $\quad 1 = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{P}(\xi=k) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}p_k$

Beh.:

$$p_k = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ikt}\varphi_\xi(t)dt, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

(d.h. brauchen die Funktion φ_ξ nur in $[-\pi,\pi]$; im allgemeinen gilt das nicht.)

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) &= \mathbf{E}e^{it\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{itn} \\
&= \sum_{n\neq k} p_n e^{itn} + p_k e^{itk} \qquad \Big|\cdot e^{-itk} \\
\Rightarrow p_k &= \varphi_\xi(t)e^{-itk} - \sum_{n\neq k} p_n e^{it(n-k)} \qquad \Big|\int_{-\pi}^{\pi} dt \\
2\pi p_k &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\varphi_\xi(t)\,dt \, - 0 \Rightarrow \text{Beh.}
\end{aligned}
$$

denn für $n-k=r\neq 0:$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{itr}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos tr + i\sin tr)\,dt \;=\; 0$

(Integration über eine volle Periode)

13.5. Vor.: $|\varphi_\xi(t_0)| = 1$ für ein $t_0 \neq 0$

Beh.: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = a + kh) = 1, \quad h = \frac{2\pi}{t_0}$

Beweis:

$\varphi_\xi(t_0)$ liegt auf Einheitskreis in C :

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \exists \text{ reelles } x_0 &: \quad \varphi_\xi(t_0) = e^{ix_0} \\
\Rightarrow \exists \text{ reelles } a &: \quad \varphi_\xi(t_0) = e^{it_0 a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{it_0 a} &= \varphi_\xi(t_0) = \mathbf{E} e^{it_0\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0 x}\, dF_\xi(x) \qquad \Big| \cdot e^{-it_0 a} \\
\Leftrightarrow \quad 1 + i0 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0(x-a)}\, dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(t_0(x-a)) + i\sin(t_0(x-a))]\, dF_\xi(x) \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(1-\cos(t_0(x-a)))}_{\geq 0}\, dF_\xi(x)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_\xi - f.s.\ \cos(t_0(x-a)) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_\xi\left(\cos(t_0(x-a)) = 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow t_0(x-a) = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = a + \frac{2k\pi}{t_0} \qquad (\mathbf{P}_\xi - \text{fast sicher})$$

Beispiele zur Veranschaulichung:

(i) $\mathbf{P}(\xi = 1) = \mathbf{P}(\xi = -1) = \frac{1}{2}$ (vgl. Aufgabe 1)

$$\varphi_\xi(t) = \cos t \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_\xi(t)| = 1 \text{ für } t = k\pi, \quad \text{wählen } t_0 = \pi \Longrightarrow h = \frac{2\pi}{t_0} = 2$$

(ii) Binomialverteilung $\xi \sim \mathrm{B}(1,p)$: $\varphi_\xi(t) = pe^{it} + q$ (vgl.Vorlesung):

$$
\begin{aligned}
1 &= |\varphi_\xi(t)| = |p(\cos t + i\sin t) + q| = |\underbrace{p\cos t + q}_{\text{Re}} + i\underbrace{p\sin t}_{\text{Im}}| \\
&= \sqrt{(p\cos t + q)^2 + (p\sin t)^2} = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos t} = 1 \quad \text{für } \cos t = 1
\end{aligned}
$$

d.h. für $t = 2k\pi$, wählen $t_0 = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{2\pi}{t_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

(iii) Poissonverteilung $\varphi_\xi(t) = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right)$

$|\varphi_\xi(t)| = 1$ wenn Exponent rein imaginär, d.h.

$$0 = \text{Re }\left(\lambda(e^{it} - 1)\right) = \lambda(\cos t - 1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 2k\pi \quad t_0 = 2\pi$$

$$\Longrightarrow \qquad \text{Periode } h = \frac{2\pi}{t_0} = 1$$

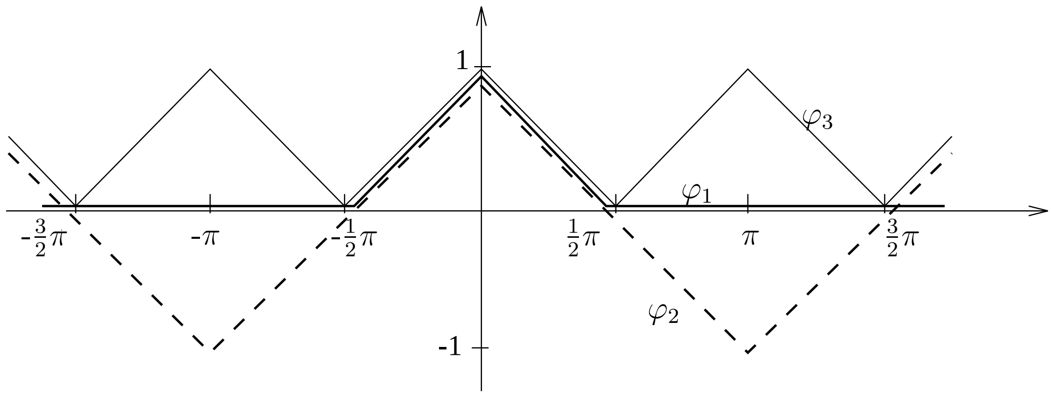
Bemerkung:

Wenn $|\varphi_\xi(t_0)| = |\varphi_\xi(t_1)| = 1$, $t_0, t_1 \neq 0$ und $\frac{t_1}{t_0} = a$ irrational ist, dann ist ξ ausgeartet, d.h. es gilt: $\mathbf{P}(\xi = a) = 1$

(Gilt nicht, wenn $t_k = 2\pi k$; hier ist $\frac{t_1}{t_0}$ rational!)

Andererseits: $\mathbf{P}(\xi = a) = 1 \Rightarrow \varphi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = e^{ita}$ ist betragsmäßig gleich 1 $\forall t$

13.6. Es läßt sich ein Gegenbeispiel konstruieren, wenn nicht $\forall t$ gilt $\varphi(t) > 0$.



$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2|t|}{\pi} & |t| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = 1 - \frac{2|t|}{\pi} \quad |t| \le \pi, \quad \text{periodisch fortsetzen}$$

$$\varphi_3(t) = 1 - \frac{2|t|}{\pi} \quad |t| \le \frac{\pi}{2}, \quad \text{periodisch fortsetzen}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind charakteristische Funktionen (noch zu zeigen $\rightarrow (*)$)
Es gilt:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_1 \cdot \varphi_3 = \begin{cases} \left(1 - \frac{2|t|}{\pi}\right)^2 & |t| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aber: $\varphi_2 \neq \varphi_3$

Für die zugehörigen Zufallsgrößen ξ_1, ξ_2, ξ_3 gilt damit Folgendes:

$\xi_1 + \xi_2$ und $\xi_1 + \xi_3$ besitzen identische Verteilungsfunktionen, d.h. es gilt: $F_{\xi_1+\xi_2} = F_{\xi_1+\xi_3}$

ξ_2 und ξ_3 dagegen haben verschiedene Verteilungsfunktionen $F_{\xi_2} \neq F_{\xi_3}$

(Vgl. auch bei Zahlen: $x + y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = z$)

zu $(*)$:

- Die Funktion φ_1 ist eine charakteristische Funktion, vgl. dazu Satz von Polya:
  φ_1 ist eine stetige, gerade, konkave Funktion mit $\varphi_1(t) \geq 0$, $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$
  zugehörige Dichtefunktion: $f_{\xi_1}(x) = \dfrac{1 - \cos ax}{x^2}$ $\quad \nexists\, \mathbf{E}\xi_1$
- ξ_2 diskret: $\quad \mathbf{P}(\xi_2 = 2k+1) = \dfrac{4}{\pi^2(2k+1)^2}$
- ξ_3 diskret: $\quad \mathbf{P}(\xi_3 = 0) = \dfrac{1}{2}$; $\quad \mathbf{P}(\xi_3 = 2(2k+1)) = \dfrac{2}{\pi^2(2k+1)^2}$

ξ_2 und ξ_3 haben andere 'Atome' : $\quad 2k+1 \neq 2\,(2k+1)$

14 Grenzwertsätze

14.1. ξ_k - Überstunden am k-ten Tag, (ξ_k) i.i.d. : $F_{\xi_k}(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \lambda = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \mathbf{E}\xi_k = \frac{1}{\lambda} = 5$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}\xi_k = \frac{1}{\lambda^2} = 25$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad S_{225} \text{ - Überstunden im Jahr}$$

Ges.: $\mathbf{P}(S_{225} > 15 \cdot 60 = 900)$

$$\begin{array}{rcl} \text{ZGVS: } \Rightarrow \quad S_n & \approx & \mathrm{N}(\mathbf{E}S_n, \mathbf{D}S_n) \ = \ \mathrm{N}(5n, 25n) \\ \dfrac{S_n - 5n}{\sqrt{25n}} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \mathrm{N}(0,1) \\ \mathbf{P}(S_{225} > 900) & = & 1 - \mathbf{P}(S_{225} \le 900) \ = \ 1 - \mathbf{P}\left(\dfrac{S_{225} - 5\cdot 225}{\sqrt{25\cdot 225}} \le \dfrac{900 - 5\cdot 225}{\sqrt{25\cdot 225}}\right) \\ & \approx & 1 - \Phi\left(\dfrac{900 - 1125}{5\cdot 15}\right) \ = \ 1 - \Phi\left(\dfrac{-225}{75}\right) \\ & = & 1 - \Phi(-3) \ = \ 0.9987 \end{array}$$

exakt: S_n - Gammaverteilt mit $\alpha = n, \beta = \lambda$ vgl. ÜA 7 und Aufgaben zu “ Absolut stetigen Zufallsgrößen “, (heißt auch Erlangverteilung , wenn α ganzzahlig)

$$\begin{array}{rcl} f_{S_n}(x) & = & \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, x^{n-1}\, e^{-\lambda x} \\ \mathbf{P}(S_{225} > 900) & = & \dfrac{0.2^{225}}{224!} \displaystyle\int_{900}^{\infty} x^{224} e^{-0.2x}\, dx \end{array}$$

unvollständige Gammafunktion, sehr aufwendig,
224-mal partiell integrieren

14.2. ξ_k - Abfüllgewicht: $\xi_k = \eta_k + 5 \quad \eta_k \sim \mathcal{U}[-0.2, 0.3]$

$$(\xi_k) \text{ i.i.d.,} \quad \mathbf{E}\xi_k = 5.05 \qquad \mathbf{E}\eta_k = \frac{-0.2 + 0.3}{2} = 0.05$$

$$\mathbf{D}\xi_k = \frac{1}{48} \qquad \mathbf{D}\eta_k = \frac{(0.3 - (-0.2))^2}{12} = \frac{1}{48}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \qquad S_n \approx \mathrm{N}(n \cdot \mathbf{E}\xi_k, n \cdot \mathbf{D}\xi_k) = \mathrm{N}(5.05 \cdot n, \tfrac{n}{48})$$

$$\begin{array}{lll} n = 197 & \Rightarrow & \mathbf{E}S_n \; = \; 197 \cdot 5.05 \; = \; 994.85 \text{ im Mittel noch für 1 Beutel Platz} \\ n = 198 & \Rightarrow & \mathbf{E}S_n \; = \; 999.9 \text{ im Mittel nicht überladen} \\ & & \mathbf{D}S_n = n \cdot \mathbf{D}\,\eta_k \; = \; \dfrac{n}{48} \quad \text{für Anwendung der } 3\sigma\text{-Regel} \\ & & 3 \cdot \sqrt{\mathbf{D}S_n} = 3 \cdot \sqrt{\dfrac{n}{48}} \approx 6 \;\; \text{für } n = 197, 198, \text{ d.h. reichlich ein Beutel} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n > 1000) \; &= \; 1 - \mathbf{P}(S_n \le 1000) \; \approx \; 1 - \Phi\left(\frac{1000 - n \cdot \mathbf{E}\xi_1}{\sqrt{n \mathbf{D}\xi_1}} \right) \\ &= \; 1 - \Phi\left(\frac{1000 - n \cdot 5.05}{\sqrt{\frac{n}{48}}} \right) \; = \; \begin{cases} 1 - \Phi(2.542) = 0.0055 & n = 197 \\ 1 - \Phi(0.049) = 0.48035 & n = 198 \end{cases} \end{aligned}$$

Genauigkeitsabschätzung (Berry-Esseen):

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{C \cdot \mathbf{E}|\xi_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}} \qquad \text{wenn } \mathbf{E}\xi_k = 0,\; \mathbf{D}\xi_k = \sigma^2$$

Deshalb hier noch zentrieren: $\xi_k \sim \mathrm{U}\left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $\mathbf{D}\xi_k = \frac{1}{48} = \sigma^2$

$$\mathbf{E}|\xi_1|^3 = \int_{\frac{-1}{4}}^{\frac{1}{4}} |x^3| \cdot 2\, dx = 4 \cdot \int_{0}^{\frac{1}{4}} |x^3|\, dx = x^4 \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{256}$$

$$\Rightarrow \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \; \le \; \frac{C \cdot \frac{1}{256}}{\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{n}} \underset{C \le 0.8}{\le} \frac{1.039}{\sqrt{n}} \underset{n=200}{=} 0.073 \quad \approx 7\%$$

$$\text{genauer:} \qquad \le \; \frac{C \cdot \mathbf{E}|\xi_1|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{(1 + |x|^3)} \underset{n=197, x=2.54}{=} 0.00692 \approx 0.7\%$$

14.3. (a) $\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2$ wenn (η_k) i.i.d., $(\eta_k) \sim \mathrm{N}(0,1)$

$$\left(\text{bisherige Schreibweise:} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \ \text{ mit } \ \xi_k = \eta_k^2\right)$$

$$\begin{aligned} \chi^2_{n,\gamma}: \quad \gamma &= \mathbf{P}(\chi^2_n \le \chi^2_{n,\gamma}) \ = \ F_{\chi^2_n}(\chi^2_{n,\gamma}) \\ z_\gamma: \quad \gamma &= \mathbf{P}(\eta_k \le z_\gamma) \ = \ \Phi(z_\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ZGVS} \quad \frac{\chi^2_n - \mathbf{E}\chi^2_n}{\sqrt{\mathbf{D}\chi^2_n}} &= \frac{\chi^2_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1) \\ \mathbf{E}\chi^2_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\,\eta_k^2 \ = \ n \cdot \mathbf{D}\,\eta_k \ = \ n \cdot 1 \ = \ n \\ \mathbf{D}\chi^2_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}\,\eta_k^2 \ = \ n \cdot (\mathbf{E}\,\eta_1^4 - (\mathbf{E}\,\eta_1^2)^2) \ = \ n \cdot (3-1) \ = \ 2n \end{aligned}$$

$$\text{NR: } \mathbf{E}\,\eta_1^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y^{1.5} e^{-y}\,dy = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$

$$\Longrightarrow \gamma \ = \ \mathbf{P}(\chi^2_n \le c) \ = \ \mathbf{P}\left(\frac{\chi^2_n - n}{\sqrt{2n}} \ \le \ \frac{c-n}{\sqrt{2n}}\right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \Phi\left(\frac{c-n}{\sqrt{2n}}\right)$$

(Monotonie, Stetigkeit der Verteilungsfunktion)

$$\Longrightarrow \quad \frac{c-n}{\sqrt{2n}} \to \Phi^{-1}(\gamma) = z_\gamma$$

(b) $\chi^2_{n,\gamma} \approx n + \sqrt{2n} z_\gamma$

$n = 100,\ \gamma = 95\% \ \Rightarrow \ z_\gamma = 1.645 \ \Rightarrow \ \chi^2_{100,95\%} \approx 123.26$ exakt : 124.3

$n = 200,\ \gamma = 90\% \ \Rightarrow \ z_\gamma = 1.282 \ \Rightarrow \ \chi^2_{200,90\%} \approx 174.36$ exakt : 174.84

14.4. ξ_k - k-ter Meßwert, (ξ_k) i.i.d. $\mathbf{E}\xi_k = \mu$ $\sqrt{\mathbf{D}\xi_k} = \sigma = 0.1$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ $\mathbf{E}S_n = n\mu$ $\mathbf{D}S_n = n\sigma^2$

fordern:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \alpha \qquad \text{hier: } \varepsilon = 0.02,\ \alpha = 0.05$$

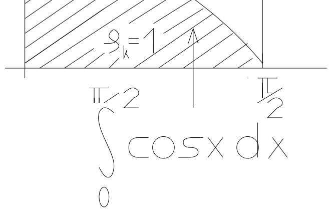
(a) Tschebyscheffsche Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|<\varepsilon\right) &= 1-\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right) \geq 1-\frac{\mathbf{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} \\
&= 1-\frac{\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \geq 1-\alpha \\
\Rightarrow \quad n &\geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\cdot\alpha} \quad \text{d.h. } n \geq \frac{0.1^2}{0.02^2\cdot 0.05} = 500
\end{aligned}$$

(b) ZGVS: $\dfrac{S_n-\mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}}=\dfrac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\cdot\left(\dfrac{S_n}{n}-\mu\right)\to \mathrm{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|<\varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|<\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) \\
&\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right)-1 \geq 1-\alpha \\
\Longrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) &\geq 1-\frac{\alpha}{2} \\
\Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma} &\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\
\Longrightarrow \quad n &\geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \\
\text{hier: } n &\geq \frac{0.1^2}{0.02^2}\cdot 1.960^2 = 96.04 \quad \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{97.5\%}=1.960\right)
\end{aligned}$$

14.5. (a) vgl. Vorlesung:



$$(\xi_k) \qquad \text{i.i.d. } \xi_k \sim \mathrm{U}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(\eta_k) \qquad \text{i.i.d. } \eta_k \sim \mathrm{U}\,[0,1]$$

$$\varrho_k = \begin{cases} 1 & \eta_k < f(\xi_k) \quad \text{(Treffer)} \\ 0 & \eta_k \geq f(\xi_k) \quad \text{(daneben)} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}\varrho_1 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \quad (\text{ nutzen hier Wert von } I)$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{E}\varrho_1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \varrho_k$$

$$(\text{Gesetz der gr. Zahlen}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}\varrho_1$$

$$\Longrightarrow \quad I_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \varrho_k \quad (\text{ ist Näherung })$$

$$\text{fordern:} \quad \mathbf{P}\left(\frac{|I_n - I|}{I} = \left|\frac{I_n}{I} - 1\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \alpha \quad \text{hier: } \varepsilon = 0.01,\ \alpha = 0.05$$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{\pi}{2} \cdot \frac{S_n}{n} - 1\right| \le \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{2}{\pi}\right| \le \frac{2}{\pi} \cdot \varepsilon\right)$$

$$\text{ZGVS:} \quad \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} = \frac{S_n - n \cdot \frac{2}{\pi}}{\sqrt{n\frac{2}{\pi}(1 - \frac{2}{\pi})}} = \frac{\sqrt{n}\pi}{\sqrt{2(\pi - 2)}}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{2}{\pi}\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{2}{\pi}\right| \le \frac{2}{\pi} \cdot \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\pi}{\sqrt{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \varepsilon\right) - 1$$

$$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{\pi - 2}}\right) - 1 \ge 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{2n}\varepsilon}{\sqrt{\pi - 2}}\right) \ge 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow n \ge \frac{\pi - 2}{2\varepsilon^2} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\pi - 2}{2 \cdot 0.01^2} \cdot 1.96^2 = 21927.71$$

(b) (ξ_k) wie oben, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \rho_k$ es gilt:

$$\mathbf{E}\rho_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \frac{2}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}$$

Gesetz der großen Zahlen:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbf{E}\rho_1 \;\Rightarrow\; I_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{S_n}{n} = \frac{\pi}{2n} \sum \cos \xi_k \quad \text{ist Näherung}$$

Nebenrechnung:

$$\mathbf{E}S_n \;=\; n \cdot \mathbf{E}\rho_1 \;=\; \frac{2n}{\pi}$$

$$\mathbf{D}S_n \;=\; n \cdot \mathbf{D}\rho_1 \;=\; n \cdot (\mathbf{E}\rho_1^2 - (\mathbf{E}\rho_1)^2) \;=\; n \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \frac{2}{\pi}\, dx - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \right)$$

$$\mathbf{D}S_n \;=\; n \cdot \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \right) \;=\; n \cdot \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$$

$$\text{ZGVS:} \quad \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} \;=\; \sqrt{n}\frac{\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}\rho_1}{\sqrt{\mathbf{D}\rho_1}} \;=\; \sqrt{n}\frac{\frac{S_n}{n} - \frac{2}{\pi}}{\sqrt{\frac{\pi^2-8}{2\pi^2}}} \;\xrightarrow{\text{d}}\; \mathrm{N}(0,1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left|\frac{I_n - I}{I}\right| < \varepsilon\right) \;&=\; \mathbf{P}\left(\left|\frac{\pi}{2}\frac{S_n}{n} - 1\right| < \varepsilon\right) \;=\; \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{2}{\pi}\right| < \frac{2}{\pi}\varepsilon\right) \\
&\approx\; 2 \cdot \Phi\left(\frac{\frac{2}{\pi}\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{\pi^2-8}{2\pi^2}}} \right) - 1 \;=\; 2 \cdot \Phi\left(\sqrt{\frac{8n}{\pi^2 - 8}}\varepsilon \right) - 1 \;\geq\; 1 - \alpha \\
&\Rightarrow\; \Phi\left(\sqrt{\frac{8}{\pi^2-8}}\varepsilon\sqrt{n} \right) \;\geq\; 1 - \frac{\alpha}{2} \\
&\Rightarrow\; n \;\geq\; \frac{\pi^2 - 8}{8\varepsilon^2} \cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \underset{\varepsilon=0.01\,\alpha=0.05}{=} \frac{\pi^2-8}{8 \cdot 0.01^2} \cdot 1.96^2 = 8977.8
\end{aligned}$$

$$\text{Verbesserung:} \qquad \frac{\frac{\pi - 2}{2}}{\frac{\pi^2 - 8}{8}} \;=\; \frac{4(\pi - 2)}{\pi^2 - 8} \;\approx\; 2.44$$

Frage: Genauigkeit der Rechteckregel

- Die Monte-Carlo-Methode ist “sinnvoll “ für Mehrbereichsintegrale, hier kaum.
- Man erreicht Konvergenzverbesserung, wenn speziell verteilte Zufallsgrößen benutzt werden (ist von $f(x)$ abhängig).

14.6. S_n - Anzahl der Bürger, die A wählen, $n = 800$, $p = 0.002$
$S_n \sim \mathrm{B}(800, 0.002)$

(a) $\mathbf{P}(S_n \leq 1) = \mathbf{P}(S_n = 0) + \mathbf{P}(S_n = 1) = 0.998^{800} + 800 \cdot 0.002 \cdot 0.998^{799} = 0.5247$

(b) $\lambda = np = 800 \cdot 0.002 = 1.6$
$\mathbf{P}(S_n \leq 1) \approx \pi_0 + \pi_1 = e^{-1.6} \cdot (1 + 1.6) = 0.5249$

(c) ohne Korrektur: $\mathbf{P}(S_n \leq 1) \approx \Phi\left(\frac{1 - 1.6}{\sqrt{1.6 \cdot 0.998}}\right) = \Phi\left(-0.47\right) = 0.3192$

mit Korrektur: $\mathbf{P}(S_n \leq 1) \approx \Phi\left(\frac{1 + 0.5 - 1.6}{\sqrt{1.6 \cdot 0.998}}\right) = \Phi\left(-0.08\right) = 0.4681$