Lineare Optimierung

Vorlesung von Prof. Christiane Tammer
Author : Georg Kuschk (Quelle : www.rikuti.de)

11. August 2006

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung , Beispiele

Zielfunktion $Q = c^T x$, $c, x \in \mathbb{R}^n \rightarrow$Min
$x \geq 0$, $Ax \leq 0$ bzw. $Ax = b$
(Gleichungs- bzw. Ungleichungs-Restriktionen
= zulässiger Bereich)

lineare Optimierungsaufgabe : $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, d.h. m Gleichungsrestriktionen
n Unbekannte

Beispiel 1 : Produktionsplan für landwirtschaftlichen Betrieb

Input	Aktivitäten	Output
$x_1 \cdot 1$ FE $\longrightarrow$ $x_1 \cdot 150$ AS $\longrightarrow$	$\boxed{\text{Anzahl Rinder } x_1}$	$x_1 \cdot 250$ €
$x_2 \cdot 0.2$ FE $\longrightarrow$ $x_2 \cdot 25$ AS $\longrightarrow$	$\boxed{\text{Anzahl Schafe } x_2}$	$x_2 \cdot 45$ €

(FE=Futtereinheit , AS=Arbeitsstunde)

1. Restriktion (Vorzeichenbedingung)

- $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ganzzahlig

FE : $x_1 + 0.2x_2 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Rinder , Schafe}}$ $\longrightarrow 250x_1 + 45x_2$
AS : $150x_1 + 25x_2 \longrightarrow$ Gesamtgewinn

weitere Restriktionen (Kapazitätsbeschränkungen für Ställe und Arbeitsstunden)

- $x_1 \leq 50$, $x_2 \leq 200$
- $150x_1 + 25x_2 \leq 10.000$ (AS)
  $x_1 + 0.2x_2 \leq 72$ (FE)

$\Rightarrow$ Modell : Lineares Optimierungsproblem
Zielfunktion : $Q = 250x_1 + 45x_2 \rightarrow Max$
Restriktionen :

$$x_1 \leq 50$$
$$x_2 \leq 200$$

$$\begin{array}{lll} x_1 + 0.2x_2 & \leq 72 & (G_1) \\ 150x_1 + 25x_2 & \leq 10.000 & (G_2) \\ x_1 \; , \; x_2 & \geq 0 & \end{array}$$

zulässige Elemente : $x_1 = 50 \; , \; x_2 = 0$

$x_1 = 0 \; , \; x_2 = 200$

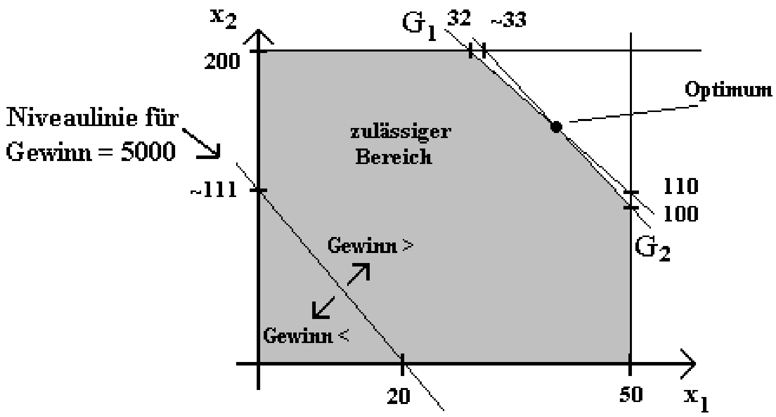


Abb. 1.1: LOP zu Beispiel 1

- Eine Verschiebung der Niveaulinie bewirkt eine Veränderung des Gewinns.
- Eine Restriktion wird unterhalb der jeweiligen Hyperebene erfüllt.
- Zulässiger Bereich ist grau eingefärbt.

<u>Optimum graphisch bestimmen :</u>

G_1 : $x_1 + 0.2x_2 \leq 72$ Für $x_1 = 50$ folgt :

$250 + x_2 \leq 360$

$x_2 \leq 110$

$\rightarrow$ Ein Punkt der Geraden ist $(x_1, x_2) = (50, 110)$

Für $x_2 = 200$ folgt :

$x_1 + 40 \leq 72$

$x_1 \leq 32$

$\rightarrow$ Ein weiterer Punkt ist $(32, 200)$

G_2 : $150x_1 + 25x_2 \leq 10.000$ Für $x_1 = 50$ folgt :

$7.500 + 25x_2 \leq 10.000$

$25x_2 \leq 2.500$

$x_2 \leq 100$

$\rightarrow$ Erster Punkt $(50, 100)$

Für $x_2 = 200$ folgt :

$150x_1 + 5.000 \leq 10.000$

$x_1 \leq \frac{5.000}{150}$

$x_1 \leq \frac{100}{3} \approx 33.3$

$\rightarrow$ Zweiter Punkt $(33.3, 200)$

Optimum rechnerisch bestimmen (LGS lösen) :

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x_1 + 0.2x_2 & = 72 \\ \text{II} & 150x_1 + 25x_2 & = 10.000 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I'} & x_2 = 360 - 5x_1 & \text{in II einsetzen :} \\ \text{II'} & 150x_1 + 9000 - 125x_1 = 10.000 & \\ & 25x_1 = 1000 & \\ & x_1 = 40 & \\ & x_2 = 360 - 200 = 160 & \end{array}$$

$\Rightarrow Q_{max} = 250x_1 + 45x_2 = 17.200$

Beispiel 2 : Transportproblem

von Firma \ nach Lager	A	B	C
I	25 x_1	17 x_2	18 x_3
II	25 x_4	18 x_5	14 x_6

Problem : In jedes Lager sollen 300t mit insgesamt minimalen Kosten geliefert werden.

Aufstellung des Modells :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\text{Input}} & & \underline{\text{Aktivitäten}} & & \underline{\text{Output}} \\ x_1 \cdot t \text{ in I} & \longrightarrow & \text{Transport von I nach A} & \longrightarrow & x_1 \text{ Tonnen in A} \\ \text{Kosten : } x_1 \cdot 25 & & \text{Menge : } x_1 & & \end{array}$$

$\hookrightarrow$ insgesamt 6 Aktivitäten

Gesamtprozess :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Menge des Gutes in I :} & & & & \\ \boxed{x_1 + x_2 + x_3} & \longrightarrow & & \longrightarrow & \boxed{x_1 + x_4 \overset{!}{=} 300t \text{ in A}} \\ \text{Menge des Gutes in II :} & & \boxed{\text{Transport}} & \longrightarrow & \boxed{x_2 + x_5 \overset{!}{=} 300t \text{ in B}} \\ \boxed{x_4 + x_5 + x_6} & \longrightarrow & & \longrightarrow & \boxed{x_3 + x_6 \overset{!}{=} 300t \text{ in C}} \end{array}$$

rechte Seite sind die ersten drei Restriktionen
weitere Restriktionen :

$x_1, ..., x_6 \geq 0$
in Firma I stehen 350t zur Verfügung : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 350$
in Firma II stehen 650t zur Verfügung : $x_4 + x_5 + x_6 \leq 650$

Zielfunktion zur Kostenminimierung :
$Q = 25x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 25x_4 + 18x_5 + 14x_6 \rightarrow Min$

LOP :

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 &&\leq 350\\
&x_4 + x_5 + x_6 &&\leq 650\\
&x_1 + x_4 &&= 300\\
&x_2 + x_5 &&= 300\\
&x_3 + x_6 &&= 300\\
&x_1, ..., x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Umformen in LGS :
Was in Firma I oder II nicht abtransportiert wird bleibt im Lager.
Fasse dies als ein neues "Scheinlager" auf.
⇒Einführung einer neuen Aktivität "NOP"

von Firma \ nach Lager	A	B	C	D
I	25 x_1	17 x_2	18 x_3	0
II	25 x_4	18 x_5	14 x_6	0

⇒

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &&= 350\\
&x_4 + x_5 + x_6 + x_8 &&= 650\\
&x_1 + x_4 &&= 300\\
&x_2 + x_5 &&= 300\\
&x_3 + x_6 &&= 300\\
&x_1, ..., x_8 \geq 0
\end{aligned}$$

x_7, x_8 sind "Schlupfvariablen"

Beispiel 3 : Diskrete Tschebyscheff-Approximation
$f(x)$ soll in $[a, b]$ durch eine Linearkombination von n gegebenen Funktionen $u_1, ..., u_n$ bestmöglich angenähert werden , d.h.

$$\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u_\nu(x) \right| \to \min_{a_\nu}$$

(optimiert wird über die a_ν)

Diskretisierung :
Betrachtung der Funktion $f(x)$ an den Stützstellen $x_1, ..., x_k$ im Intervall $[a, b]$.

Bezeichnungen : $f_j := f(x_j)$, $u_{\nu_j} := u_\nu(x_j)$, $j = 1, ..., k$

$$\max_{1\leq j\leq k} \left| f_j - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u_{\nu_j}(x) \right| \to \min_{a_\nu}$$

= diskretisiertes Problem
(äußeres Problem = Minimumproblem
inneres Problem = Maximumproblem)

$$\min_{a_\nu} \max_{j} \left| f_j - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u_{\nu_j} \right|$$

Einführen eines neuen Parameters a_0 , um aus dem Maximumproblem ein Minimumproblem zu formulieren :

$$= \underbrace{\min_{a_\nu} \min}_{zs.fassen} \left\{ a_0 \mid a_0 \geq f_j - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u_{\nu_j} \quad , j = 1, ..., k \right\}$$

$$= \min_{a_0, a_1, \ldots, a_n} \left\{ \underbrace{a_0}_{ZF} \mid \underbrace{a_0 \geq \left| f_j - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u_{\nu_j} \right| \quad , j = 1, ..., k}_{Restriktionen} \right\}$$

($\hat{=}$ lineares Optimierungsproblem mit Restriktion)

Da $a_0 \geq |...| \;\Leftrightarrow\; a_0 \geq (...)$ und $a_0 \geq -(...)$, kann man nun schreiben :

<u>Zielfunktion :</u> $a_0 \longrightarrow Min$

<u>Restriktionen :</u>

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 u_{11} - a_2 u_{21} - ... - a_n u_{n1} &\geq -f_1 \\ &... \\ a_0 - a_1 u_{1k} - a_2 u_{2k} - ... - a_n u_{nk} &\geq -f_k \\ a_0 + a_1 u_{11} + a_2 u_{21} + ... + a_n u_{n1} &\geq f_1 \\ &... \\ a_0 + a_1 u_{1k} + a_2 u_{2k} + ... + a_n u_{nk} &\geq f_k \end{aligned}$$

(= LOP ohne Vorzeichenrestriktionen)

Kapitel 2

Das allgemeine lineare Optimierungsproblem (LOP)

geg.: $x, c \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$
$x \widehat{=}$ "Aktivitäten"
$c \widehat{=}$ "Effizienzkoeffizienten"
$A \in \mathbb{R}^{(m,n)} = (a_{ij})$ Matrix mit m Zeilen und n Spalten
$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $(y = Ax)$

Halbordnung : $y^1 \geq y^2 \Leftrightarrow y_i^1 \geq y_i^2 \quad i = 1, ..., m$
- reflexiv : $y^1 \leq y^1$
- antisymmetrisch : $y^1 \leq y^2 \ \wedge \ y^2 \leq y^1 \Rightarrow y^1 = y^2$
- transitiv : $y^1 \leq y^2 \ \wedge \ y^2 \leq y^3 \Rightarrow y^1 \leq y^3$

aber : beliebige Elemente nicht vergleichbar !

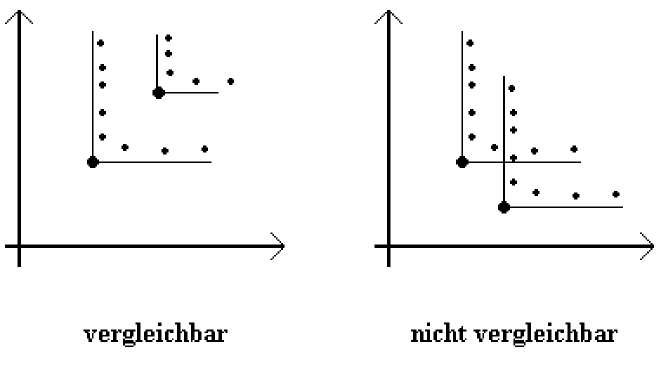


Abb. 2.1:

LOP vom Typ 1 : (LOP1)

- $Q = c^T x \rightarrow Min \ \widehat{=}$ Zielfunktion , äquivalent : $-Q \rightarrow Max$
- $Ax \leq b \ \widehat{=}$ Restriktionen
- Ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$ heisst ***zulässig***

Bemerkung 1 :

Darstellung von LOP1 durch nichtnegative Variablen :

Zu gegebenen $x \in \mathbb{R}^n$ existieren stets $x' \geq 0$ und $x'' \geq 0$ aus dem $\mathbb{R}^n$ mit $x = x' - x''$

z.B. $x = (x + x^*) - x^*$ mit $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$, $x_i^* = \begin{cases} x_i & falls\ x_i \geq 0 \\ -x_i & falls\ x_i \leq 0 \end{cases}$, wobei

$0 \leq x + x^* = \begin{pmatrix} x_1 + x_1^* \\ \vdots \\ x_n + x_n^* \end{pmatrix}$, $x_i + x_i^* = \begin{cases} 2x_i & falls\ x_i \geq 0 \\ 0 & falls\ x_i < 0 \end{cases}$ und $0 \leq x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$

Substitution in LOP1 :

$$\begin{array}{rcl} c^T x' - c^T x'' \to Min & \longrightarrow & \tilde{c}^T x \to Min \\ A(x' - x'') \leq b & \longrightarrow & (A\ ,\ -A) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \leq b \\ x' \geq 0\ ,\ x'' \geq 0 & \longrightarrow & x = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} \geq 0 \qquad , wobei\ \ \tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} \end{array}$$

$\widehat{=}$ vorzeichenbeschränktes Problem (LOP2)

Typ des neuen Problems : LOP2

$Q: \quad \tilde{c}^T x \to Min$

$\tilde{A}x \leq b \qquad \tilde{A} = (A\ ,\ -A)$

$x \geq 0$

Dabei ist $x \in \mathbb{R}^{2n}$: $\begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix}$, $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(m,2n)}$

Bemerkung 2 :

LOP1 in der Form LOP2 hat mehr Variablen und Restriktionen

Bemerkung 3 :

LOP2 ist Spezialfall von LOP1 :

Zusammenfassen der Restriktionen $\tilde{A}x \leq b$, $x \geq 0$ zu

$A'x \leq b'$, $A'x = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ -I \end{pmatrix} \cdot x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = b'$ (I=IdentityMatrix)

Bemerkung 4 :

Die Typen LOP1 und LOP2 sind äquivalent :

Jede Lösung von LOP2 löst LOP1 und jede Lösung von LOP1 erzeugt eine Lösung von LOP2.

Bemerkung 5 :

Herleitung von Typ LOP2 aus LOP1, so dass die Zahl der Variablen und Restriktionen gleich bleibt :

Sei x_1 **nicht** vorzeichenbehaftet. Besteht die erste Spalte von A nur aus Nullen, so ist x_1 beliebig.

$\Rightarrow$ Q besitzt in LOP1 (LOP2?) kein endliches Minimum oder der Koeffizient bei x_1 verschwindet
$\Rightarrow$ x_1 tritt in LOP1 (LOP2?) **nicht** auf.

Für den zweiten Fall $a_{11} \neq 0$ gilt : Wegen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leq b_1$$

$$\Rightarrow \quad b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = y_1 \geq 0$$

und deshalb durch Elimination nach x_1 :

$$x_1 = \left(b_1 - y_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \cdot \frac{1}{\underbrace{a_{11}}_{\neq 0}} \right)$$

Die erste Zeile des Restriktionensystems wird : $y_1 \geq 0$ und aus den übrigen eliminiert man x_1.
Vorteil : Keine Erhöhung der Dimension
Nachteil : Man muss eliminieren

LOP3 :

$Q: \quad c^T x \to \min$
$Ax = b$
$x \geq 0$

Bemerkung 6 :
LOP2 ist äquivalent zu LOP3.

a) $Ax = b$ ist äquivalent zu $Ax \leq b$ und $-Ax \leq -b$
Dann ist
$c^T x \to Min$
$Ax \leq b$
$-Ax \leq -b$
$x \geq 0$
ein Problem vom Typ LOP2

b) Ist LOP2 gegeben, so existiert zu jedem zulässigen x ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y \geq 0$, so dass
$Ax + y = b \qquad (y = b - Ax \geq 0)$

Umwandlung :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{LOP2}} & & \underline{\text{LOP3}} \\ c^T x \to \min & & c^T x \to \min \\ Ax \leq b & \Longrightarrow & Ax + y = b \\ x \geq 0 & & x, y \geq 0 \end{array}$$

LOP3 in Standardform :

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \quad , \quad \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \lambda \quad , \quad A = (A \ , \ I)$

$$\Rightarrow \ LOP3: \quad \begin{array}{c} \lambda^T \xi \to \min \\ A\xi = b \\ \xi \geq 0 \end{array}$$

Zusammenfassung :

LOP1 äquivalent LOP2 äquivalent LOP3

2.1 Der zulässige Bereich

Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ die dem Restriktionensystem von LOP1 genügen, heißen zulässig für LOP1.
Äquivalent für LOP2 und LOP3.
Betrachte LOP1 :
$B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\} \quad \hat{=}$ zulässiger Bereich von LOP1
Die m Restriktionen in $Ax \leq b$ müssen gleichzeitig erfüllt sein, d.h.

$$x \in B \ \Leftrightarrow \ x \in \bigcap_{i=1,\dots,m} H_i \quad , wobei$$

$$H_i := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \leq b_i \right\} \quad , \ i = 1, ..., m \quad \hat{=} abgeschlossener Halbraum$$

Die begrenzende Hyperebene ist :

$$H_i^o := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \right\} \quad , \ i = 1, ..., m \quad d.h.$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i = 0.$$

Die zulässigen Punkte $x \in B$ liegen wegen

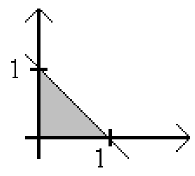
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \leq 0$$

in Richtung der negativen Gradienten (je Zeile der Matrix) von

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i : \quad -grad(y) = -(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})^T$$

Beispiel

Eigenschaften des zulässigen Bereichs :



$$x_2 \leq -x_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 - 1 \leq 0$$
$$-grad(x_1 + x_2 - 1) = -\left(\frac{\partial ...}{\partial x_1}, \frac{\partial ...}{\partial x_2}\right) = -(1,1)$$

Def. 2.1 : Eine **konvexe Linearkombination** von Punkten $x^1, ..., x^l$ $\left(x^i \in \mathbb{R}^n\right)$ ist gegeben durch :

$$x = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x^j \quad , \quad \alpha_j \geq 0 \ \ \forall j = 1, ..., l \ \ , \ \ und \ \ \sum_{j=1}^{l} \alpha_j = 1$$

Sind alle $\alpha_j > 0$, so spricht man von einer **echt konvexen Linearkombination**.

Beispiel : $l = 2$, $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$
$x \ = \ \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \ = \ \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_2 x^1 - \alpha_2 x^1$
Wegen $x^1 \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=1}$ folgt : $x = x^1 + \alpha_2 (x^2 - x^1)$, d.h. nur noch ein Parameter
D.h. auf der Geraden durch x^1 $(\alpha_2 = 0)$ und x^2 $(\alpha_2 = 1)$ wird die Strecke $\overline{x^1 x^2}$ betrachtet :

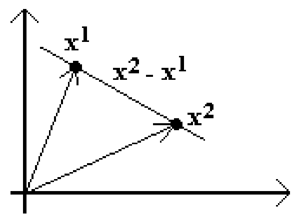


Abb. 2.2: konvexe Linearkombination

Def. 2.2 : Eine Punktmenge $R \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex , falls mit $x^1, x^2 \in R$ auch jede konvexe Kinearkombination zu R gehört.

Def. 2.3 : Sei $R \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Ein Punkt $x \in R$ heißt **Ecke** von R , falls er sich nicht als konvexe Linearkombination von zwei anderen Punkten aus R darstellen lässt.

Beispiel : $R =$ abgeschlossener Einheitskreis
Behauptung : Jeder Randpunkt des Einheitskreises ist eine Ecke.
Beweis : Andernfalls müsste sich ein Randpunkt x^0 als konvexe Linearkombination von $x^1, x^2 \in R$, $\left(x^1 \neq x^0, x^2 \neq x^0\right)$ darstellen lassen : $x^0 = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$.
Dann müsste die Verbindungsstrecke ganz in R liegen, dürfte also den Rand von R nicht schneiden.
Also berührt die Verbindungsstrecke die Kreisscheibe in x^0 , und ist somit eine Tangente.
Diese liegt aber außerhalb der Kreisscheibe (bis auf x^0)

$\Rightarrow$ Widerspruch q.e.d.

Beispiele :

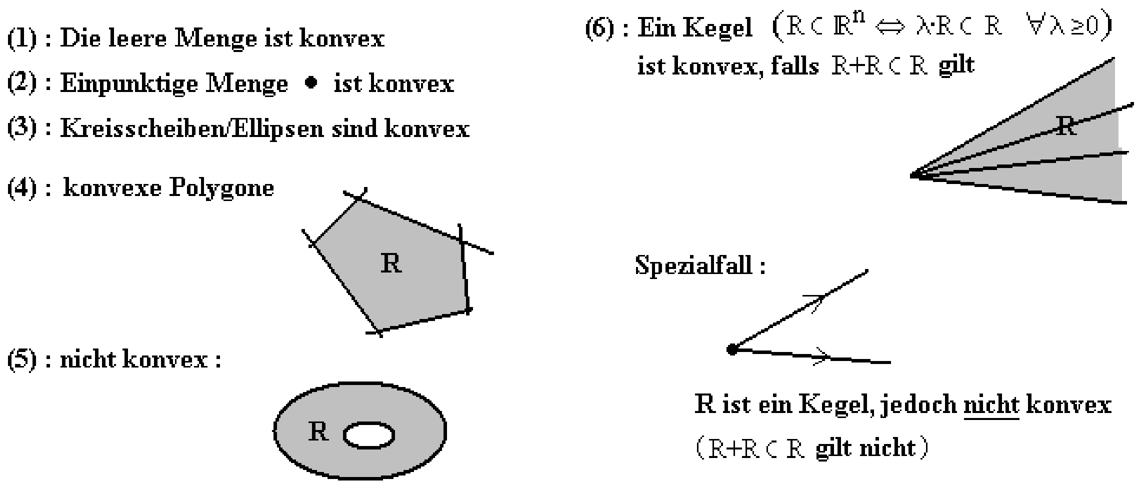


Abb. 2.3: Punktmengen

Bemerkung 8 : Der Durchschnitt beliebig vieler konvexen Mengen ist konvex.

Beweis :

Sei $R = \bigcap_{i \in I} R_i$, R_i *konvex* $\forall i \in I$

$x^1, x^2 \in B$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$

$\Rightarrow \; x^1, x^2 \in R_i \;\; \forall i \in I$

$$\Rightarrow \; \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in R_i \;\; \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \; R_i \;\; konvex, d.h. \;\; \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in \underbrace{\bigcap_{i \in I} R_i}_{=R}$$

$$\Rightarrow \; R \; konvex.$$

Hinweis : $B = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; Ax \leq b\}$ $\widehat{=}$ Bereich , den wir betrachten

Satz 2.1 :

Auch wenn das Restriktionensystem Gleichungen enthält gilt :

B ist konvex und $x \in B$ ist genau dann Ecke von B , wenn es sich als Schnittpunkt von n linear unabhängigen Hyperebenen darstellen lässt.

Desweiteren gibt es höchstens endlich viele Ecken.

Beweis :

a) B ist konvex :

zeigen , dass jeder Halbraum H_i konvex ist :

$$\begin{array}{c|c} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^1 \leq b_i & \cdot\alpha_1 \geq 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^2 \leq b_i & \cdot\alpha_2 \geq 0 \\ \hline & + \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_1 x_k^1 + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_2 x_k^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\alpha_1 x_k^1 + \alpha_2 x_k^2) \;\leq\; b_i \cdot \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{=1}$$

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \in H_i \quad \Rightarrow \; H_i \; konvex.$$

$\Rightarrow$ B als Durchschnitt von endlich vielen konvexen Mengen ist wieder konvex.
(Hätte man die Hyperebenen "=" anstelle der Halbräume "<" genommen, so hätte man die Konvexität der Hyperebenen gezeigt.)

b1) $'' \Leftarrow''$:
$x^0 = \left(x_1^0, ..., x_n^0\right) \in B$ sei Schnittpunkt von n linear unabhängigen Hyperebenen

$$Ax^0 \leq b \quad (1) \tag{2.1}$$

$$\sum a_{i_{(\lambda)}\nu} x_\nu^0 = b_{i_{(\lambda)}} \qquad , \lambda = 1, ..., n \tag{2.2}$$

,wobei die Zeilen $(a_{i_{(\lambda)}1}, ..., a_{i_{(\lambda)}n})$ linear unabhängig sind.
$\Rightarrow x^0$ als Lösung von (4) eindeutig bestimmt.

<u>indirekt :</u> Wäre x^0 keine Ecke, so würden $x^1, x^2 \in B$ existieren mit
$x^0 = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.
x^1 kann (4) nicht erfüllen , da $x^1 \neq x^0$, d.h. etwa $x^1 \notin H_i^=$
$\Rightarrow$ x^1 etwa auf "innerer" Seite von H_i
Da $x^0 \in H_i^=$, folgt, dass x^2 auf der "äußeren" Seite von H_i liegt.
$\Rightarrow$ $x^2 \notin L$ $\Rightarrow$Widerspruch
$\Rightarrow x^0$ ist Ecke von B.

b2) $'' \Rightarrow''$:
$x^0 \in B$ sei eine Ecke

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i_{(\mu)}\nu} x_\nu^0 = b_{i_{(\mu)}} \qquad , \mu = 1, ..., k \tag{2.3}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{r\nu} x_\nu^0 < b_r \qquad , r \neq i_1, ..., r \neq i_k \tag{2.4}$$

(6) ist auch für eine hinreichend kleine Kugelumgebung $U(x^0)$ von x^0 in B erfüllt.
Annahme : (5) ist für weniger als n linear unabhängige Gleichungen erfüllt.

$\Rightarrow$ Wenigstens für eine Gerade (oder höher-dimensionale Mannigfaltigkeit) durch x^0 ist (5) erfüllt.

Bezeichne die Gerade mit g :
Betrachte die Punkte der Strecke $\underbrace{U(x^0) \cap g}_{\subset L} = \gamma \neq \emptyset$
($\neq \emptyset$, da $x^0 \in U(x^0)$, $x^0 \in g$)
x^0 ist Mittelpunkt von γ.
$\Rightarrow$ x^0 ist keine Ecke $\Rightarrow$ Widerspruch
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens n linear unabhängige Zeilen in (5).
$\Rightarrow$ x^0 ist Schnittpunkt von n linear unabhängigen Gleichungen in (5).

Gibt es mehr als n Gleichungen in (5) , so sind diese linear abhängig.
(die Ecken heißen dann entartet)

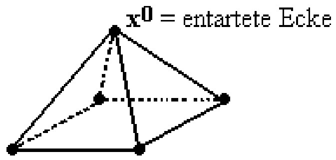


Abb. 2.4: entartete Ecken

c) Ecken existieren höchstens, wenn $n \leq m$
(Wegen b1,b2 : x^0 ist Ecke $\Leftrightarrow$ x^0 ist Schnittpunkt von n linear unabh. Hyperebenen)
In (1) gibt es $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ Systeme von n Zeilen.
Sind die ausgewählten n Zeilen linear unabhängig, dann lösen und prüfen, ob (1) erfüllt ist. (D.h. ob die Lösung in B liegt.)
$\Rightarrow$ Es gibt höchstens endlich viele Ecken. q.e.d.

Anmerkung :
Aus z.B. 20 Ungleichungsrestriktionen folgt : $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = 184756$ Möglichkeiten für Ecken.

Bemerkung : Die Ecken besitzen eine besondere Bedeutung bei der Durchmusterung des zulässigen Bereichs.
Daher ist ein Verfahren zur Durchmusterung der Ecken von B notwendig.

Def. 2.4 : Besitzt der Durchschnitt einer Geraden mit B mehr als einen Punkt, so heißt er **Kante** von B, falls sich kein Punkt der Geraden als konvexe Linearkombination von 2 Punkten aus B darstellen lässt, die nicht zur Geraden gehören.

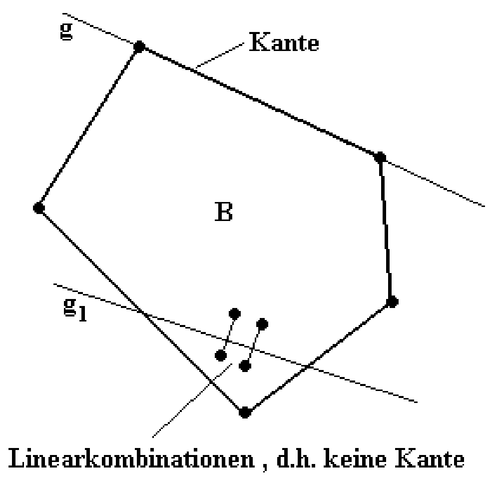


Abb. 2.5: Kanten

- Die Randpunkte einer Kante sind die Ecken.
  (Da sie sich nicht von anderen Punkten aus B konvex linear kombinieren lassen.

- Zwei Randpunkte einer Kante heißen benachbarte Ecken.

2.2 Eckenübergang in B

(Ecke $\rightarrow$ Nachbarecke)

- Sei $p^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ Ecke von B

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu^0 = b_i \qquad , \ i = 1, ..., n \tag{2.5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{j\nu} x_\nu^0 \leq b_j \qquad , \ j = n+1, ..., m \tag{2.6}$$

- Ist p^0 nicht entartet , so steht in (2) $<$ sonst $=$.

- Einführung eines neuen Koordinatensystems mit dem Ursprung p^0 :
  Koordinaten-Hyperebenen $H_i^=$ $\ i = 1, ..., n$ linear unabhängig

$$T \ : \ \ y_i = b_i - \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu$$

  $\hat{=}$ Koordinatentransformation ($x^0 \rightarrow x$)
  (Das System ist auflösbar wegen der linearen Unabhängigkeit.)
  Einsetzen in $Ax \leq b$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu + \underbrace{y_i}_{\geq 0} = b_i \qquad , \ i = 1, ..., n$$

  Restriktionen :

$$\begin{aligned} y_1 &\geq 0 \\ &... \\ y_n &\geq 0 \\ a'_{n+1,1} \cdot y_1 + ... + a'_{n+1,n} \cdot y_n &\leq b'_{n+1} \\ &... \\ a'_{m,1} \cdot y_1 + ... + a'_{m,n} \cdot y_n &\leq b'_m \end{aligned}$$

  alle Ungleichungen zusammen = (1')

- Bei Transformation T gilt : $x^0 \rightarrow y^0 = (0, ..., 0)^T$ zulässig
  $\Rightarrow \ b'_j \geq 0 \qquad , j = n+1, ..., m$
  ($b'_j = 0$ nur bei Entartung)

- Die ersten Zeilen in (1') besagen, dass die Koordinatentransformation so vorgenommen wurde, so dass B jetzt im positiven Quadranten liegt.

- Betrachtung der nichtnegativen i-ten Koordinatenachse und Durchschnitt mit B liefert in (1') :

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0 \\ y_1 = y_2 = ... = y_{i-1} = y_{i+1} = ... = y_n &= 0 \\ a'_{n+1,i} \cdot y_i &\leq b'_{n+1} \qquad , \; b'_{n+1} \geq 0 \\ a'_{m,i} \cdot y_i &\leq b'_m \qquad , \; b'_m \geq 0 \end{aligned}$$

alle Ungleichungen zusammen = (1")

a) Falls $a'_{n+1,i}, ..., a'_{m,i} \leq 0$, so ist die gesamte i-te Achse im zulässigen Bereich B enthalten. $(y_i \geq 0)$
(Die i-te Achse ist natürlich eine Kante.)

b) Falls $a'_{j,i} > 0$ für gewisse j , so folgt :
   - p^0 nicht entartet : $b'_{n+1} > 0, ..., b'_m > 0$
   - (1") ist für $y_i = 0$ erfüllt und für y_i wachsend in positiver Richtung $(y_i > 0)$ bis zu einem Grenzwert :

$$y_i^* = \min_{a'_{ji} > 0} \frac{b'_j}{a'_{ji}} = \frac{b'_r}{a'_{ri}} > 0$$

   (r gesucht)
   $\Rightarrow$ Die y_i-Achse gehört von 0 bis y_i^* zu B und ist eine Kante.
   $\Rightarrow$ p^* : $y^* = (0, ..., 0, \underbrace{y_i^*}_{>0}, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n$
   p^* ist eine Ecke , also Randpunkt einer Kante.
   p^* ist Nachbarecke zu p^0 $\quad (\underbrace{y^0 = (0, ..., 0)^T}_{in\ y-Koordinaten})$

   In p^* (y^*) schneiden sich die Hyperebenen $\underbrace{H_1^=}_{y_1=0}, \underbrace{H_2^=}_{y_2=0}, ..., \underbrace{H_{i-1}^=}_{y_{i-1}=0}, \underbrace{H_{i+1}^=}_{y_{i+1}=0}, ..., \underbrace{H_n^=}_{y_n=0}$
   und $H_r^=$. (Da man an diese anstößt.)
   $H_r^=$: (r-te Gleichung)

$$a'_{r1} y_1 + ... + a'_{ri} y_i + ... + a'_{rn} y_n = b'_r$$

   - Die Hyperebenen $H_1^=, ..., H_{i-1}^=, H_{i+1}^=, ..., H_n^=, H_r^=,$ sind linear unabhängig , da die Normalen der Basis-Hyperebenen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \; {\scriptstyle (=i-1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \; {\scriptstyle (=i+1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'_{r1} \\ \vdots \\ a'_{ri} > 0 \\ \vdots \\ a'_{rn} \end{pmatrix},$$

   linear unabhängig sind.

   - Wähle jetzt in p^* : $H_j^=$ $(j \neq i)$ wie in p^0 , aber ersetze $H_i^=$ durch $H_r^=$!

* Wir kamen von einer nichtentarteten Ecke p^0.
  r kann in $\{n+1, n+2, ..., m\}$ eindeutig bestimmt sein.
  Dann tritt im Zulässigkeitsbereich B in den Gleichungen (1') genau n-mal das Gleichheitszeichen auf.
  $(\underbrace{1, 2, ..., i-1, i+1, ..., n}_{y_i=0}, r) \quad \Rightarrow p^*$ ist dann nicht entartet.
  (Ist hingegen r nicht eindeutig bestimmt, so ist p^* entartet.)

* Nun kann ein weiterer Eckenübergang versucht werden.

c) $b'_\mu = 0$ für gewisse $\mu \in \{n+1, ..., m\} \quad \Rightarrow$Entartung
   $a'_{ji} > 0$ für gewisse $j \in \{n+1, ..., m\}$
   * Ist gleichzeitig $b'_j = 0$, so ist (1") für $y_i > 0$ nicht erfüllbar.
     $\Rightarrow$ positive y_i-Achse liegt nicht im zulässigen Bereich B.

   * Falls für $a'_{ji} > 0$ auch stets $b'_j > 0$ gilt, so erhält man wie in b) die y_i-Achse als Kante und gelangt zu einem Nachbareckpunkt.

     Man hätte aber bei p^0 andere Basis-Hyperebenen wählen können (wegen der Entartung), und wäre evt. zu einem anderen benachbarten Eckpunkt gelangt.

Zusammenfassung Eckenübergang
(Ecke $\rightarrow$ Nachbarecke)
Beim Eckenübergang im $\mathbb{R}^n$ ergeben sich somit folgende Schritte :

1. Aufstellung der die Anfangsecken charakterisierenden n linear unabhängigen Hyperebenen.

2. Koordinatentransformation T
   (Ecke wird neuer Nullpunkt und die n Restriktionen, die mit "=" erfüllt sind werden neue Koordinaten-Hyperebenen.)

3. Auflösung von T , einsetzen in $Ax \leq b$.
   Es verändern sich :

   - die letzten $m-n$ Zeilen stark
   - die ersten n Zeilen : $y_i \geq 0$

4. Tabelle der y_i (Suche nach Nachbarecken)

y_1	$y_2 \quad (i=2)$	...	y_n
	$y_2^* = \min\limits_{a'_{ji}>0} \frac{b'_j}{a'_{ji}} = \frac{b'_r}{a'_{ri}}$		

5. Beim Eckenübergang $p^0 \rightarrow p^*$ Austausch :
   $H_1^=, ..., H_n^= \quad \rightarrow \quad H_1^=, ..., H_{i-1}^=, H_{i+1}^=, ..., H_n^=, H_r^=$

2.3 konvexe beschränkte Polyeder

(beschränktes Polyeder = Polytop)

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\} \qquad \Rightarrow LOP1$$

Es gibt folgende Möglichkeiten für B :

1. $B = \emptyset$
2. B ist eine nichtleere, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (Polytop)
3. B ist eine nichtleere unbeschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$
   (Zielfunktion auf Minimum untersuchen)

Satz 2.2 :
Ist B ein Polytop, so ist jeder Punkt aus B eine konvexe Linearkombination der endlich vielen Ecken von B.

Beispiel

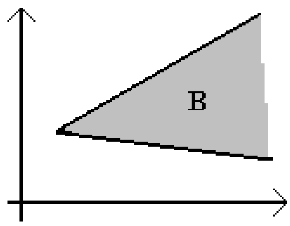


Abb. 2.6: Für diesen Bereich B gilt Satz 2.2 nicht, da B hier kein Polytop ist (unbeschränkter Bereich)

Beweis : B wird im $\mathbb{R}^n$ bestimmt durch $Ax \leq b$ $\quad , A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$

- $x \in B$ heiße "von der Sorte k" , wenn es auf k der m Hyperebenen $H_i^=$ liegt.
  (D.h. die i-te Zeile im System $Ax \leq b$ ist mit "=" erfüllt.)
- Sei $k < m$ für $x^0 \in B$, x^0 beliebig, aber fest
- Sind unter diesen k Zeilen n linear unabhängige, so ist x^0 eine Ecke (Satz 2.1) und wir sind fertig
  x^0 ist durch Eckpunkt konvex linear kombinierbar.
  Finden sich keine n linear unabhängigen Zeilen, so ist das Gleichungssystem der k Zeilen wenigstens durch die Punkte einer Geraden $x = x^0 + \lambda \cdot g$ erfüllt.
- Einsetzen in die restlichen Zeilen von $Ax \leq b$ $, d.h.$ $A^0x^0 \leq b^0$ liefert :
  $A^0x^0 + \lambda A^0 g \leq b^0$
  Für hinreichend kleine λ wächst $|\lambda|$
  $\Rightarrow$ Es muss für ein $\overline{\lambda_1} > 0$ und ein $\overline{\lambda_2} < 0$ eine Verletzung von $\leq$ eintreten, da sonst (wenigstens) eine Hyperebene ganz zu B gehören würde , entgegen der Voraussetzung B =Polytop.

  x^0 ist damit durch $x^1 = x^0 + \lambda_1 g$ und $x^2 = x^0 + \lambda_2 g$ konvex linear kombinierbar.
- x_1 und x_2 erfüllen also mindestens eine weitere Restriktion mit "=", sind also "von einer Sorte $\geq k+1$ "
- Resultat : Jeder Punkt $x \in B$ kann durch Eckpunkte oder Punkte mindestens "einer Sorte höher als er selbst" konvex linear kombiniert werden.

- <u>Induktion :</u> Jeder Punkt $x \in B$ kann durch Eckpunkte oder Punkte der "höchsten Sorte" konvex linear kombiniert werden.
- Diese sind aber nach "Resultat" selbst Eckpunkte, da für sie die zweite Möglichkeit nicht in Frage kommt. q.e.d.

2.4 Das Optimierungsproblem

$f : B \to \mathbb{R}^1$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(x)$, $x \in B$

- $\mu = f(x^0)$ heißt **<u>globales Minimum</u>** von f auf B , falls $f(x) \geq f(x^0)$ $\forall x \in B$
(x^0 muss dabei nicht eindeutig bestimmt sein!)
- $\mu = f(x^0)$ heißt **<u>lokales Minimum</u>** von f auf B , wenn $f(x) \geq f(x^0)$
$\forall x \in U(x^0) \cap B$ für eine hinreichend kleine Umgebung $U(x^0)$ von x^0 .
- Ein globales Minimum ist auch stets ein lokales Minimum.
(Die Umkehrung gilt nur unter der Konvexitätsvoraussetzung)

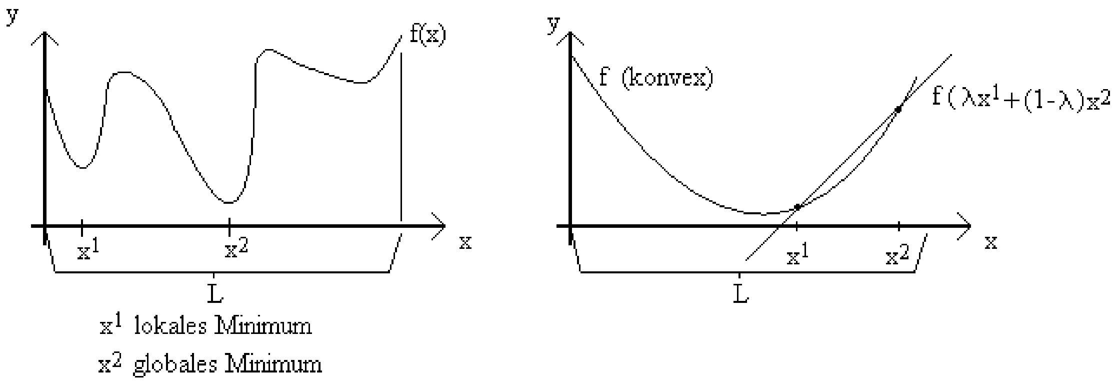


Abb. 2.7: Optimierungsprobleme

- Sei B konvex. Ist dann die Zielfunktion konvex oder sogar linear, so kann man unter Ausnutzung der speziellen Aufgabenstruktur effektive Algorithmen entwickeln.

<u>Def. 2.5 :</u>
$f : B \to \mathbb{R}^1$ heißt konvex (bzw. konkav), falls $\forall x^1, x^2 \in B$, $\forall \lambda \in [0,1]$ gilt :
$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \;\leq\; (bzw.\ \geq)\; \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2)$.

<u>Bemerkung :</u> Für lineares f würde in Def. 2.5 "=" gelten !
Gilt in Def. 2.5 $<$, so heißt f streng konvex (bei $0 < \lambda < 1$)

<u>Satz 2.3 :</u> Für konvexe Funktionen f gilt :
Jedes lokale Minimum ist gleichzeitig auch globales Minimum !

Beweis : (zulässiger Bereich immer konvex)
Sei $f(x^0) = \mu^0$ lokales Minimum, aber $\mu_1 = f(x^1) < \mu^0$, $(x^0, x^1 \in B)$,
so würde gelten :
Aus B konvex folgt : $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^0 \in B$ für $0 < \lambda < 1$
und λ hinreichend klein

Aus f konvex folgt : $f(x) = f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^0)$

$$\leq \lambda \underbrace{f(x^1)}_{=\mu} + (1-\lambda) \underbrace{f(x^0)}_{<\mu}$$

$$< \lambda\mu^0 + (1-\lambda)\mu^0 = \mu^0$$

Für hinreichend kleine λ folgt, dass $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^0$ in einer beliebig kleinen Umgebung von x^0 liegt.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Aussage, dass $f(x^0) = \mu^0$ lokales Minimum sei.

q.e.d.

Satz 2.4 : Eine streng konvexe Funktion kann ihr Minimum nur in einem Punkt annehmen. (D.h., falls das Minimum existiert, so ist es eindeutig bestimmt.)

Beweis : Wäre $f(x^1) = f(x^2) = \mu$ das Minimum von f auf B und $x^1 \neq x^2$, so würde für $\lambda = \frac{1}{2}$ wegen der strengen Konvexität gelten :

$$f\left(\underbrace{\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2}_{\in B\ (konvex)}\right) \underbrace{<}_{streng\ konvex} \frac{1}{2}\underbrace{f(x^1)}_{=\mu} + \frac{1}{2}\underbrace{f(x^2)}_{=\mu} = \mu$$

$\Rightarrow$ μ ist nicht Minimum $\qquad$ $\Rightarrow$ Widerspruch $\qquad$ q.e.d.

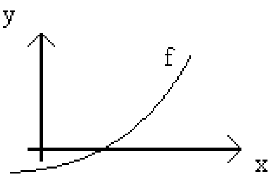


Abb. 2.8: f ist eine konvex Funktion , besitzt jedoch kein Minimum

Satz 2.5 : Für konvexe Funktionen f ist die Menge (mengentheoretisch !) der Punkte, in denen f das Minimum annimmt, konvex.

Beweis : Sei $M \subset B$ die Menge der Minimalstellen von f auf B .
Desweiteren seien $x^1, x^2 \in M$ und $\lambda \in [0,1]$,
d.h. $f(x^1) = f(x^2) = \mu \ = \min\limits_{x \in B} f(x)$.
zu zeigen : M konvex :
$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in B$, da B konvex ist
Weiter gilt : $f(\underbrace{\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2}_{\in B}) \ \leq \ \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \ = \lambda\mu + (1-\lambda)\mu \ = \mu$
$\Rightarrow$ Da $<$ nicht gelten kann (wegen μ Minimum) folgt :
$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \ = \ \mu$
$\Rightarrow$ $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$ $\qquad$ q.e.d.

Bemerkung : Falls mit f auch $-f$ konvex ist , dann gilt die Aussage von Satz 2.5 auch für das Maximum.
Bedeutung dieser Forderung :
$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \ = \ \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$
(Ist z.B. für lineare Funktionen erfüllt , gilt aber nicht für allgemeine konvexe Funktionen !)

Satz 2.6 : Eine konkave Funktion f nimmt ihr globales Minimum über einem Polytop B , in einer Ecke von B an.

<u>Beweis :</u> Seien $x^1, ..., x^k$ die endlich vielen Ecken von B .

Jedes $x \in B$ ist nach Satz 2.2 darstellbar als $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \quad , \quad \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad , \quad \lambda_i \geq 0$.

(= konvexe Linearkombination der endlich vielen Ecken)

Es existiert natürlich $\mu = \min\limits_{i \in \{1,...,k\}} f(x^i) = f(x^j) \quad , \; j$ fest , $1 \leq j \leq k$.

Für beliebige $x \in B$ gilt somit :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i\right) \underbrace{\geq}_{f\ konkav} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x^i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x^j) \;\; = f(x^j) \;\; = \mu$$

$\Rightarrow \; \forall x \in B : \;\; f(x) \geq f(x^j)$, wenn x^j eine Ecke von B ist. q.e.d.

(Das Minimum von f über B existiert also und wird im Eckpunkt x^j angenommen.)

- Die Suche nach dem globalen Minimum reduziert sich damit auf die "Inspektion" der Eckpunkte von B .
- In der linearen Optimierung gelten folgende Aussagen (da die Zielfunktion sowohl konvex als auch konkav ist) :
  - Annahme des globalen Minimums kann im Polytop nur in einer Ecke erfolgen (Konkavität).
  - Falls eine Ecke lokales Minimum ist, so ist sie auch globales Minimum (Konvexität).
- Man kann also lokale Methoden anwenden, um das globale Minimum zu suchen.
  Eine wesentliche Rolle bei dieser Suche spielen die Ecken.

Kapitel 3

Die Simplexmethode

(von Dantzig)
geg.: Typ 3 für lineare Optimierungsprobleme (LOP3) :

$$B : \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad = \text{zulässiger Bereich}$$

Voraussetzungen : $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $rang(A) = m$,d.h. m lin. unabh. Gleichungsrestriktionen
$x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$
Zielfunktion : $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \min\limits_{x \in B}$!

Durch Voruntersuchungen sei die Ecke $p^0 \in B$ bekannt.
(D.h. LOP3 besitzt zulässige Lösungen.)

Da B durch m linear unabhängig Gleichungen beschrieben wird folgt :

Zur Charakterisierung der Ecke p^0 hat man bereits m linear unabhängige Hyperebenen, also müssen noch $(n-m)$ lin. unabhängige Vorzeichenrestriktionen mit "=" erfüllt sein.
(Satz 2.1 : $m + (n-m) = n$) linear unabh. Hyperebenen zur Charakterisierung der Ecke.)
Diese $n - m$ verschwindenden Variablen heißen **NichtBasisVariablen** ,
Die übrigen m Variablen **BasisVariablen**.

Die mit "=" erfüllten Restriktionen sind :

$$\begin{aligned}
a_{(1\lambda_1)}x^0_{\lambda_1} + a_{(1\lambda_2)}x^0_{\lambda_2} + ... + a_{(1\lambda_m)}x^0_{\lambda_m} + a_{(1\lambda_{m+1})}x^0_{\lambda_{m+1}} + ... + a_{(1\lambda_n)}x^0_{\lambda_n} &= b_1 \\
a_{(2\lambda_1)}x^0_{\lambda_1} + a_{(2\lambda_2)}x^0_{\lambda_2} + ... + a_{(2\lambda_m)}x^0_{\lambda_m} + a_{(2\lambda_{m+1})}x^0_{\lambda_{m+1}} + ... + a_{(2\lambda_n)}x^0_{\lambda_n} &= b_2 \\
&... \\
a_{(m\lambda_1)}x^0_{\lambda_1} + a_{(m\lambda_2)}x^0_{\lambda_2} + ... + a_{(m\lambda_m)}x^0_{\lambda_m} + a_{(m\lambda_{m+1})}x^0_{\lambda_{m+1}} + ... + a_{(m\lambda_n)}x^0_{\lambda_n} &= b_m \\
x^0_{\lambda_{m+1}} &= 0 \\
&\vdots \\
x^0_{\lambda_n} &= 0
\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems hat den Rang n .
Basisvariablen : $x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_m}$
Nichtbasisvariablen : $x_{\lambda_{m+1}}, ..., x_{\lambda_n}$

Determinante der Koeffizientenmatrix : $\left| \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \vec{0} & I_{n-m} \end{pmatrix} \right| \neq \vec{0}$

Matrix A_1 hat den Rang m , (=Vollrang) , besitzt also ein Inverses.
Die zu den Basisvariablen zugehörigen Spalten in A_1 (Basisspalten bzw. Basisvektoren) sind linear unabhängig.

Für eine Ecke $x^0 \in B$ gilt : $\underbrace{\overbrace{x^0_{\lambda_1}}^{\geq 0}, ..., \overbrace{x^0_{\lambda_m}}^{\geq 0}}_{Basisvariablen}, \underbrace{\overbrace{x^0_{\lambda_{m+1}}}^{=0}, ..., \overbrace{x^0_{\lambda_n}}^{=0}}_{NichtBasisVariablen}$.

<u>Def. 3.1 :</u> Eine Lösung x^0 von $Ax = b$ heißt **<u>Basislösung</u>** , falls sie in $n - m$ verschwindende Nichtbasisvariablen und m Basisvariablen (mit linear unabhängigen Basisvektoren) eingeteilt werden kann.
Sind die m BasisVariablen alle ≥ 0 , so ist die Basislösung zulässig.

<u>Bemerkung :</u>

- Eine Ecke $p^0 \in B$ gestattet immer eine Darstellung als zulässige Basislösung. (Und jede zulässige Basislösung stellt eine Ecke dar.)
- Für eine nichtentartetet Ecke sind keine weiteren Restriktionen mit "=" erfüllt, d.h. alle Basisvariable sind > 0 !
- Für entartete Ecken sind einige Basisvariablen $= 0$!
  Die Zuordnung in der Basislösung ist nicht mehr eindeutig, da die Einteilung in BasisVariablen und NichtBasisVariablen unterschiedlich erfolgen kann.

Sei eine Ecke p^0 und eine Basislösung x^0 gegeben.
$\Rightarrow$ Auflösung von $Ax = b$ nach den BasisVariablen.
$\Rightarrow$ <u>kanonische Form</u> von LOP3 (LOP3') : (Koeffizienten der BV=1)

$$\begin{array}{lllll} x_{\lambda_1} & & + a'_{1,m+1} x_{\lambda_{m+1}} + ... + a'_{1,n} x_{\lambda_n} & = b'_1 \\ & \ddots & ... & \\ & x_{\lambda_m} & + a'_{m,m+1} x_{\lambda_{m+1}} + ... + a'_{m,n} x_{\lambda_n} & = b'_m \end{array}$$

$$x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_n} \geq 0$$

$$Q = Q^0 + c'_{m+1} x_{\lambda_{m+1}} + ... + c'_n x_{\lambda_n} \rightarrow min$$

Die Zielfunktion Q ist in NichtBasisVariablen ausgedrückt.
$Q^0 = Q(x^0) =$ Wert der Zielfunktion an der Stelle x^0 .

Werte der betrachteten Basislösungen : $x^0_{\lambda_{m+1}}, ..., x^0_{\lambda_n} = 0$
Daraus folgt für die BasisVariablen : $x^0_{\lambda_1} = b'_1, ..., x^0_{\lambda_m} = b'_m$
und somit gilt : $b'_1, ..., b'_m \geq 0$
Bei Nichtentartung gilt : $b'_1, ..., b'_m > 0$

Herleitung der kanonischen Form :

$Ax = b$ (Aufteilung von x in Basisvektoren $\tilde{x}$ und NichtBasisektoren $\hat{x}$)

D.h. $x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \hat{x} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \hat{c} \end{pmatrix}$, $A = (\tilde{A}, \hat{A})$

$\Rightarrow \; \tilde{A}\tilde{x} + \hat{A}\hat{x} = b$

Da die Basisinverse $\tilde{A}^{-1}$ existiert, folgt :

$$\begin{aligned} \tilde{x} + \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} &= \tilde{A}^{-1}b \\ \tilde{x} &= \tilde{A}^{-1}b - \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} \end{aligned}$$

Für eine Ecke gilt : $x^0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \tilde{x}^0 = \tilde{A}^{-1}b$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad Q(x^0) &= \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1} b \\ Q(x) &= \tilde{c}^T \tilde{x} + \hat{c}^T \hat{x} \\ &= \tilde{c}^T \left(\tilde{A}^{-1}b - \hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} \right) + \hat{c}^T \hat{x} \\ &= Q(x^0) + \underbrace{\left(\hat{c}^T - \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1} \hat{A} \right)}_{=:\, c'^T} \hat{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad Q = Q^0 + c'^T \hat{x}$$

LOP3' :

$$\begin{aligned} \tilde{x} + \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} \;&=\; \tilde{A}^{-1}b \;=:\; b' \\ \tilde{x}, \hat{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} \leq b' \\ Q = Q^0 + c'^T \hat{x} \end{aligned} \right\} (1')$$

Minimalitätskriterium : $c'^T \geq 0$ (x^0Minimalstelle)

Bemerkung : LOP kann im Raum der NichtBasisVariablen interpretiert werden :
(x^0 = Nullpunkt in diesem Raum!)
$x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_m} \geq 0$ werden eingearbeitet in :

$$\begin{aligned} a'_{1,m+1} x_{\lambda_{m+1}} + ... + a'_{1,n} x_{\lambda_n} &\leq b'_1 \\ &... \\ a'_{m,m+1} x_{\lambda_{m+1}} + ... + a'_{m,n} x_{\lambda_n} &\leq b'_m \end{aligned}$$

Dies ist System (1') wie beim Eckenübergang.
Zielfunktion : $Q - Q^0 \;=\; c'_{m+1} x_{\lambda_{m+1}} + ... + c'_n x_{\lambda_n} \;=\; min\,!$

Satz 3.1 (Minimalpunkt-Kriterium)

Hat die Zielfunktion $Q(x)$ in der kanonischen Form nur nichtnegative Koeffizienten $c'_{m+1}, ..., c'_n \geq 0$, so ist x^0 Minimalstelle von Q auf B.

<u>Beweis :</u> Sei $x \in B$ beliebig.

$\Rightarrow\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., n$

$Q(x) = Q^0 + \underbrace{c'_{m+1} x_{\lambda_{m+1}} + ... + c'_n x_{\lambda_n}}_{\geq 0} \geq Q^0$ q.e.d.

Gilt $c'_{m+1}, ..., c'_n > 0$, so ist für $x \neq x^0$(nur dann sind NBV $\neq 0$ möglich) : $Q(x) > Q(x^0)$
$\Rightarrow$ Minimalpunkt eindeutig bestimmt.

- Ist x^0 nach dem hinreichenden Kriterium <u>nicht</u> als Minimalstelle erkennbar (obwohl x^0 Minimalstelle sein könnte), so ist $c'_j < 0$
  $\Rightarrow$ Übergang zu Nachbarecke

  Die Achse $c'_\alpha < 0$, $(x_{\lambda_{m+1}} = 0, ..., x_{\lambda_\alpha} \geq 0, ..., x_{\lambda_n} = 0)$
  (im Raum der NichtBasisVektoren) bildet eine von x^0 ausgehende Kante, falls sie zu B gehört.

  Für diese Achse (entspr. LOP3') gilt im vollen Rang :

  $$\begin{aligned} x_{\lambda_1} &= b'_1 - a'_{1\alpha} x_{\lambda_\alpha} \geq 0 \\ &... \\ x_{\lambda_m} &= b'_m - a'_{m\alpha} x_{\lambda_\alpha} \geq 0 \end{aligned}$$

  mit $b'_\mu \geq 0 \quad \forall \mu = 1, ..., m$ (Im Fall der Nicht-Entartung gilt $b'_\mu > 0$.)
  ($x_{\lambda_\alpha} \geq 0$ ist Parameter. Alle anderen NBV entlang dieser Kante sind 0 .)

- $c'_\alpha < 0$ (eventuell : $c'_\alpha = \min \left\{ c'_j < 0 \ : \ j \in \{m+1, ..., n\} \right\}$)
- Werte der Zielfunktion auf dieser Kante :
  $Q = Q^0 + \underbrace{c'_\alpha}_{<0} \underbrace{x_{\lambda_\alpha}}_{\geq 0} \leq Q^0$ für $x_{\lambda_\alpha} \geq 0$

<u>Betrachtungen wie beim Eckenübergang :</u>

a) $a'_{1\alpha}, a'_{2\alpha}, ..., a'_{m\alpha} \leq 0$
   $\Rightarrow$ Die gesamte nichtnegative Achse ist in B enthalten.
   Da $x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_m} \geq 0$ folgt :
   Zielfunktion Q fällt beliebig, da x_{λ_α} nach oben unbeschränkt ist.
   $\Rightarrow$ Es existiert <u>kein</u> endliches Minimum.

b) x^0 ist <u>nicht</u> entartet
   $\Rightarrow\ b'_1, ..., b'_m > 0$:
   $a'_{\mu\alpha} > 0$ für gewisse $\mu \in \{1, ..., m\}$. x_{λ_α} wachse von Q ausgehend.

   Die Kante endet im Eckpunkt x^*, wenn erstmals eine der Variablen $x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_m}$ verschwindet. Also etwa bei $x^*_{\lambda_\beta}$: $x^*_{\lambda_\alpha} = \min\limits_{a'_{\mu\alpha} > 0} \frac{b'_\mu}{a'_{\mu\alpha}} = \frac{b'_\mu \ (>0)}{a'_{\beta\alpha} \ (>0)} > 0$!

   – Koordinaten von x^* :
     $x^*_{\lambda_1} \geq 0, ..., x^*_{\lambda_\beta} = 0, ..., x^*_{\lambda_m} \geq 0, x^*_{\lambda_{m+1}} = 0, ..., x^*_{\lambda_\alpha} > 0, ..., x^*_{\lambda_n} = 0$
     $\left(x^*_{\lambda_\beta} = b'_\beta - a'_{\beta\alpha} \frac{b'_\beta}{a'_{\beta\alpha}} = 0 \right)$

   – Zielfunktions-Wert $Q^* = Q(x^*) = Q^0 + \underbrace{c'_\alpha}_{<0} \underbrace{x^*_{\lambda_\alpha}}_{>0} < Q^0$

     $\Rightarrow$ Wir haben eine Nachbarecke P^* mit kleinerm Zielfunktionswert $Q(x^*)$ erhalten.

$\Rightarrow$ Zu dieser Ecke P^* muss es eine zulässige Basisdarstellung geben :

$$\underbrace{x^*_{\lambda_1} \geq 0 \, ,..., \underbrace{x^*_{\lambda_\alpha}}_{ehem.Stelle\ \beta} > 0, ..., x^*_{\lambda_m} \geq 0}_{m\ Basisvariablen}, \underbrace{x^*_{\lambda_{m+1}} = 0, ..., \underbrace{x^*_{\lambda_\beta} = 0}_{ehem.Stelle\ \alpha} \, , ..., x^*_{\lambda_n} = 0}_{(n-m)\ NichtBasisVariablen}$$

(Austausch der BasisVariablen und der NichtBasisvariablen !)
$\Rightarrow$ Damit erhält man ein kanonisches System.

- In LOP3' wird die Zeile β nach x_{λ_α} aufgelöst (möglich, da $a'_{\beta\alpha} > 0$). In allen anderen Zeilen des kanonischen Systems wird x_{λ_α} eliminiert.
- Wie in LOP3' erhält man auch jetzt die Unabhängigkeit der (neuen) Basisspalten. Die neuen rechten Seiten sind wieder nichtnegativ, da wir wieder in einer Ecke sind.
  (Sind einige =0 , so handelt es sich um eine Entartung von x^* !)
- Mit der neuen Basislösung x^* und dem neuen kanonischen System kann die Untersuchung fortgesetzt werden.

c) $a'_{\mu\alpha} > 0$ für gewisse μ , x^0 entartet : $b'_k = 0$ für gewisse k.

Wie bei b) wird nun der Übergang zu einer Nachbarecke versucht :
Man muss $x^*_{\lambda_\alpha} = \min\limits_{a'_{\mu\alpha}>0} \frac{b'_\mu}{a'_{\mu\alpha}} = \frac{b'_\beta}{a'_{\beta\alpha}} \geq 0$ setzen (≥ 0 möglich, da entartet)

Man erhält den Eckpunkt x^* :
$x^*_{\lambda_1} \geq 0, ..., x^*_{\lambda_\beta} = 0, ..., x^*_{\lambda_m} \geq 0, x^*_{\lambda_{m+1}} = 0, ..., x^*_{\lambda_\alpha} \geq 0, ..., x^*_{\lambda_n} = 0$

Fallunterscheidung :

1) $x^*_{\lambda_\alpha} > 0 \rightarrow b'_\beta > 0 \Rightarrow$ alles wie in b)
2) $x^*_{\lambda_\alpha} = 0 \rightarrow b'_\beta = 0$
   $P^0(x^0) = (b'_1, ..., b'_m, 0, ..., 0) = P^*(x^*)$
   $\Rightarrow$ Man bleibt also an der gleichen Ecke P^0 und gleicher Funktionswert : $Q^* = Q^0$
   $\Rightarrow$ Übergang zu einer neuen Basislösung mit neuem kanonischen System ($a'_{\beta\alpha} > 0$). (aber gleichbleibender Ecke)
   Diese neue Basislösung kann zum Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen werden.

3.1 Iteration (Simplexverfahren)

Treten bei den Eckenübergängen keine Entartungen auf, so endet der Simplex-Algorithmus (d.h. die sukzessive Durchführung der Übergänge Ecke→Nachbarecke) nach endlich vielen Schritten. Man hat dabei entweder das Minimum gefunden, oder seine Nicht-Existenz gezeigt.

a) Minimum existiert nicht → Ende
b) Minimum wird erreicht → Ende

c) Übergang zu einer Nachbarecke mit kleinerem Zielfunktions-Wert.
D.h. die Rückkehr zum gleichen Punkt ist dann nicht mehr möglich.
$Q = Q^0 + \underbrace{c'_\alpha}_{<0} \underbrace{x_{\lambda_\alpha}}_{>0} < Q^0$ (bei Nicht-Entartung)

$\Rightarrow$ c) kann nur endlich oft durchgeführt werden, denn nach Satz 2.1 gibt es höchstens endlich viele Ecken.

$\Rightarrow$ Ende nach a) oder b)

3.1.1 Die Simplex-Tableaus

Für jede erreichte Ecke (oder Basislösung) wird die kanonische Form in ein Tableau eingetragen :

$BV \setminus NBV$	$x_{\lambda_{m+1}} \cdots$	**Pivotspalte** x_{λ_α}	$\cdots x_{\lambda_n}$	*rechte Seite*	$(*)_{(nur\ fuer\ a'_{\mu\alpha}>0)}$
x_{λ_1}	$a'_{1,m+1} \cdots$	$a'_{1,\alpha}$	$\cdots a'_{1,n}$	b'_1	$\frac{b'_1}{a'_{1,\alpha}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Pivotzeile x_{λ_β}	$a'_{\beta,m+1} \cdots$	**Pivotelement** $a'_{\beta,\alpha}$	$\cdots a'_{\beta,n}$	b'_β	$\frac{b'_\beta}{a'_{\beta,\alpha}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{λ_m}	$a'_{m,m+1} \cdots$	$a'_{m,\alpha}$	$\cdots a'_{m,n}$	b'_m	$\frac{b'_m}{a'_{m,\alpha}}$
Zielfunktion	$c'_{m+1} \cdots$	$c'_\alpha < 0$	$\cdots c'_n$	$-Q^0 \ (*1)$	
$\Sigma - Probe \ (*2)$	$\sigma'_{m+1} \cdots$	σ'_α	$\cdots \sigma'_n$	σ^0	

(*1) : $Q = Q^0 + \hat{c}^T \hat{x}$, $-Q + \hat{c}^T \hat{x} = Q^0$
(*2) : Zur Überprüfung : Spaltensummen = 1

Übergang zur nächsten Basislösung

- Test, ob : $c'_{m+1}, ..., c'_n \geq 0$
  Falls ja, so ist das Minimum erreicht.
  Falls nein, dann Übergang.
- 1. Auswahl eines $c'_\alpha < 0$ (α bestimmt die Pivotspalten)
     Test : Pivotspalte ≤ 0
     ja $\Rightarrow$ Es existiert kein endliches Minimum.
     nein $\Rightarrow$ Mit 2. fortfahren.
  2. Für $a'_{j\alpha} > 0$ bilde man $\frac{b'_j}{a'_{j\alpha}}$ und trage dies in (*) ein.
  3. Der kleinste Quotient bestimmt die Pivotzeile β. (Pivotelement = $a'_{\beta\alpha}$)
     $\Rightarrow$ Neue kanonische Form, neues Tableau
- Das neue Tableau :
  1. Das Pivotelement $a'_{\beta\alpha}$ wird zu $\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$
  2. Die restlichen Elemente der alten Pivotspalte werden mit $-\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$ multipliziert.
     Die restlichen Elemente der alten Pivotzeile werden mit $\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$ multipliziert.

3. – Die restlichen Zellen der Spalte i : $+(a'_{\beta,i} \cdot$neuer Pivotspalten-Eintrag)
   (Mit $a'_{\beta,i}$ = Pivotzeilen-Element der Spalte i)
   – Ebenso die rechte Seite der b_i

   (Man braucht nur das entsprechende neue kanonische System aufschreiben.)

$BV \backslash NBV$	$x_{\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	x_{λ_β}	$\cdots$	x_{λ_n}	*rechte Seite*
x_{λ_1}	$a'_{1,m+1} - a'_{\beta,m+1}\frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}}$	$\cdots$	$-\frac{a'_{1,\alpha}}{a'_{\beta\alpha}}$	$\cdots$	$a'_{1,n} - a'_{\beta,n}\frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}}$	$b'_1 - b'_\beta\frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\beta\alpha}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{λ_α}	$a'_{\beta,m+1}\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$	$\cdots$	$\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$	$\cdots$	$a'_{\beta,n}\frac{1}{a'_{\beta\alpha}}$	$\frac{b'_\beta}{a'_{\beta,\alpha}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{λ_m}	$a'_{m,m+1} - a'_{\beta,m+1}\frac{a'_{m,\alpha}}{a'_{\beta,\alpha}}$	$\cdots$	$-\frac{a'_{m,\alpha}}{a'_{\beta,\alpha}}$	$\cdots$	$a'_{m,n} - a'_{\beta,n}\frac{a'_{m,\alpha}}{a'_{\beta,\alpha}}$	$b'_m - b'_\beta\frac{a'_{m,\alpha}}{a'_{\beta,\alpha}}$
$-ZF$	$c'_{m+1} - a'_{\beta,m+1}\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$	$\cdots$	$-\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$	$\cdots$	$c'_n - a'_{\beta,n}\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$	$-Q^0 - b'_\beta\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$
$\Sigma - Probe$	$\sigma'_{m+1} - a'_{\beta,m+1}\frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$	$\cdots$	$-\frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$	$\cdots$	$\sigma'_n - a'_{\beta,n}\frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$	$\sigma^0 - b'_\beta\frac{\sigma'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}$
$\Sigma - Test$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	1

4. Die Summenprobe

   Im Ausgangs-Tableau setzen wir :
   $\sigma'_\mu = 1 - c'_\mu - \sum_{k=1}^{m} a'_{k,\mu} \quad , \mu = m+1, ..., n$
   $\sigma^0 = 1 - (-Q^0) - \sum_{k=1}^{m} b'_k$
   Aus dem Ausgangstableau ergibt sich die Gesamtspaltensumme von 1.
   Diese Gesamtspaltensumme = 1 bleibt, auch wenn das Tableau umgerechnet wird.

Anfangstableau

Das Anfangstableau geht von einer kanonischen Form (LOP3') aus. Dazu erforderlich ist eine Anfangsecke mit zugehöriger Basislösung.

- Liegt ein LOP2 vor ($Ax \leq b$, $x \geq 0$, $Q(x) = c^T x \to \min$) , so ist der Nullpunkt ein Eckpunkt.
  Einführung von Schlupfvariablen : $x_{n+1}, ..., x_{n+m} \geq 0$

$$\begin{array}{lllll} x_{n+1} & & +a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \geq 0 \\ & \ddots & & \\ & x_{n+m} & +a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = b_m \geq 0 \end{array}$$

  $Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$
  $x_1, ..., x_{n+m} \geq 0$, NichtBasisVektoren : $x_1, ..., x_n$, BasisVektoren : $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$

  $n + m$ Restriktionen sind mit "=" erfüllt
  $\Rightarrow$ Nullpunkt $(x_1, ..., x_n) = 0$ ist eine Ecke.

- In der Form LOP3 :
  $\min\{Q(x)\ :\ Ax = b\ \ , x \geq 0\}$ Sei $b \geq 0$ (immer möglich)

  Methode der Schein- bzw. künstlichen Variablen : (2-Phasen-Methode)

  - $B \subset \mathbb{R}^n$ wird in einen konvexen Bereich $\hat{B} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eingebettet, so dass $B = \hat{B} \cap \mathbb{R}^n$. In $\hat{B}$ sei eine Ecke bekannt. Um eine Anfangsecke für B zu erhalten, wandern wir mittels Simplex-Algorithmus längs $\hat{B}$ "auf B zu".

    $\hat{B} \subset \mathbb{R}^{n+m}$: $\Rightarrow$ System $\hat{3}$:

    $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \geq 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \geq 0 \end{aligned}$$

    $x_1, ..., x_n$: natürliche Variablen
    $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$: künstliche Variablen
    $x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m} \geq 0$

  - $\hat{3}$ ist kanonische Form :

    $\overbrace{x_1, ..., x_n = 0}^{NBV}\ ,\ \overbrace{x_{n+1} = \underbrace{b_1}_{\geq 0}, ..., x_{n+m} = \underbrace{b_m}_{\geq 0}}^{BV}$
    = zulässige Basislösung, und diese ist natürlich eine Ecke

  - $B = \hat{B} \cap \mathbb{R}^n$ (da $\mathbb{R}^n \cong (x_1, ..., x_n, \underbrace{0, ..., 0}_{m})$)

  - "Auf B zuwandern :"
    Betrachte das Optimierungsproblem $U = x_{n+1} + ... + x_{n+m} \to \min$ unter den Restriktionen $\hat{3}$.
    $\Rightarrow$ Anwendung des Simplex-Algorithmus zur Bestimmung einer Anfangsecke. (D.h. zur Lösung dieses Problems.)

Bemerkung :
x^* sei Minimallösung von $\hat{3}$, $U^* = U(x^*)$
Wenn Entartung ausgeschlossen wird, so endet der Simplex-Algorithmus für $\hat{3}$ nach endlich vielen Schritten (wegen $U \geq 0$ und $\hat{B} \neq \emptyset$ existiert das Minimum) in einem Eckpunkt von $\hat{B}$.

1. $U^* > 0$
   $\Rightarrow$ $B = \emptyset$ $, U^* = \min U$
   Wäre $P \in B$, so wäre $P \in \hat{B}$. Aber in P wäre der Zielfunktions-Wert $U(P) = 0$
   $\Rightarrow$ Widerspruch zu $U^* = \min U > 0$.

2. $U^* = 0$
   $\Rightarrow$ Minimaleckpunkt : $x^* = (\underbrace{x_1^* \geq 0, ..., x_n^* \geq 0}_{U^*=U(x^*)=0}, \underbrace{0}_{x_{n+1}^*}, ..., \underbrace{0}_{x_{n+m}^*})$
   Also $x^* \in B$.
   Es müssen $(n+m)$ linear unabhängige Restriktionen mit "=" erfüllt sein, da x^* Ecke von $\hat{B}$ ist.

Im $\mathbb{R}^n$, (setze $x_{n+1} = 0, ..., x_{n+m} = 0$) , müssen deren n linear unabhängige Gleichungen übrig bleiben.

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1^* + ... + a_{in}x_n^*(+x_{n+1}^*) &= b_i \\ &... \\ a_{j1}x_1^* + ... + a_{jn}x_n^*(+x_{n+j}^*) &= b_j \\ x_l^*, ..., x_k^* &= 0 \\ x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^* &= 0 \end{aligned}$$

Praktische Durchführung :

Umrechnung von U auf die NichtBasisVariablen von $\hat{3}$:

$$\begin{aligned} U &= x_{n+1} + ... + x_{n+m} \\ &= \underbrace{b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j}_{x_{n+1}} + ... + \underbrace{b_m - \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j}_{x_{n+m}} \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu - x_1 \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu 1} - ... - x_n \sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu n} \end{aligned}$$

Anfangstableau :

$BV \setminus NBV$	x_1	$\cdots$	x_n	
x_{n+1}	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
$-U$	$-\sum a_{\mu 1}$	$\cdots$	$-\sum a_{\mu n}$	$-\sum b_\mu$

Nach endlich vielen Schritten endet der Simplex-Algorithmus an einem Minimaleckpunkt P^* :

$BV \setminus NBV$	x_{λ_1}	$\cdots$	x_{λ_n}	
$x_{\lambda_{n+1}}$				
$\vdots$				
$x_{\lambda_{n+m}}$				
				$-U^*$

Schlußfolgerungen aus dem Endtableau :

1) $-U^* < 0 \quad \Rightarrow \quad B = \emptyset$, fertig

2) $-U^* = 0 \quad \Rightarrow \quad P^*$ ist Ecke von B.

Bemerkung zu 2) :

Die Schlupfvariablen können unter den NichtBasisVariablen sein oder auch nicht.

2a) $(x_{n+1}, ..., x_{n+m}) \subset (\overbrace{x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_n}}^{NBV})$

(D.h. alle Scheinvariablen sind NichtBasisVariablen.)

Dieser Fall ist möglich, da $U^* = 0$ ist , also $x^*_{n+1}, ..., x^*_{n+m} = 0$!
Ist P^* nicht entartet , so gilt $x^*_{\lambda_{n+1}}, ..., x^*_{\lambda_{n+m}} > 0$.
Dies sind die Basisvariablen.
Darunter können die Scheinvariablen wegen $U^* = 0$ nicht sein.

Da die kanonische Form von 3 aus $\hat{3}$ durch Nullsetzen der Scheinvariablen entsteht, müssen wir die Spalten zu $x^*_{n+1}, ..., x^*_{n+m}$ im Tableau für P^* streichen !
$\Rightarrow$ Jetzt ist Basislösung bekannt.
$\Rightarrow$ Umrechnung von Q auf die zu 3 gehörigen, restlichen NichtBasisVariablen.
$\Rightarrow$ Start der Q-Minimierung ! $U \to \min \longrightarrow U^* = U(x^*)$, P^*opt.

2b) Ist P^* entartet, so können einige der Scheinvariablen unter den BV vorkommen.
Man hat somit noch keine kanonische Form für das Ausgangsproblem LOP3 durch das Tableau für P^* gefunden.
Man muss also eine andere Basisdarstellung für P^* suchen, welche die Scheinvariablen <u>nicht</u> in der Basis enthält.
(Motiv für den Basiswechsel ist jetzt nicht die Optimierung!)

$BV \setminus NBV$	$x_{\lambda_1} \cdots$ *nat. Variable* x_ν $\cdots x_{\lambda_n}$	*rechte Seite*	
$x_{\lambda_{n+1}}$			
$\vdots$			
ScheinVariable			$(*)$
$x_{\lambda_{n+\mu}}$	$a_{\mu,\nu} \neq 0$	$\vec{0}$ *Wert von* $x_{\lambda_{n+\mu}}$	
$\vdots$			
$x_{\lambda_{n+m}}$			
		$-U^*$	

Ziel : Scheinvariable $\longrightarrow$ NichtBasisVariable
Dazu : Basisaustausch :
Wenn ein $a_{\mu,\nu} \neq 0$ in der Zeile einer Scheinvariablen und in der Spalte einer natürlichen Variable steht, so wird dieses Element als Pivotelement gewählt.

<u>Basisaustausch im Tableau (*) :</u>
Wegen der Null (Spalte der rechten Seite, Zeile μ) ändern sich die rechten Seiten nicht.
Damit bleiben auch die Werte der BasisVariablen gleich, also bleiben wir beim Basisaustausch in P^* , erhalten jedoch eine andere Basisdarstellung.
Man wiederholt diesen Vorgang mehrfach, bis :

1. Keine Scheinvariablen mehr in der Basis $\Rightarrow$ 2a)

2. Noch Scheinvariablen unter den Basisvariablen, aber in diesen Zeilen keine $a_{\mu,\nu} \neq 0$ (in den Spalten der natürlichen Variablen)
$\Rightarrow$ Also gibt es im Tableau (d.h. in der zugehörigen kanonischen Form) Zeilen, in denen nur Scheinvariablen auftreten.
Nullsetzen der Scheinvariablen (dies ist der Übergang von $\hat{B}$ zu B) heißt :
Streichen der Spalten, die zu den Scheinvariablen gehören und Streichen der Zeilen, in

denen sich nur Scheinvariablen befinden. Das neue Programm 3 enthält dann weniger als m Zeilen, d.h. der Rang von 3 ist $< m$.

In jedem Fall hat man dann ein Ausgangstableau für die Optimierung von 3 erhalten. Natürlich muss ein Kreisen ausgeschlossen werden, um zum Tableau für P^* zu kommen.

3.2 Lexikographische Simplexmethode

(Methode der lexikographischen Auswahl des Pivotelementes)
- Zur Behandlung der Entartung ! (sehr rechenintensiv)

Bestimmung von :

$$x^*_{\lambda_\alpha} = \min_{a'_{\mu,\alpha}>0} \frac{b'_\mu}{a'_{\mu,\alpha}} \qquad \left(= \frac{b'_\beta}{a'_{\beta,\alpha}} \quad \beta \; evt. \; mehrdeutig \right)$$

Es gehen von einer Ecke genau $n - m$ Kanten aus.
Man kann also jede der Achsen $x_{\lambda_{m+1}}, ..., x_{\lambda_n}$ für die Bestimmung von $x^*_{\lambda_\alpha} > 0$ verwenden.

- Bei einer entarteten Ecke kann es aber passieren, dass, obwohl mehr als $n-m$ Kanten von der Ecke ausgehen, weniger als $n-m$ Kanten durch die NichtBasisVektoren einer Basisdarstellung beschrieben werden. (oder gar keine, wenn $b'_1, ..., b'_m = 0$)
- Ist die Ecke nicht Minimalpunkt, dann gibt es mindestens eine von der Ecke wegführende Kante mit kleinerem Zielfunktions-Wert Q. Diese muss also nicht durch die gerade gewählten $n - m$ NichtBasisVektoren beschrieben werden.
  $\Rightarrow$ Es besteht also die Möglichkeit des Kreisens in der Basisdarstellung, so dass die gesuchte Kante nicht erfasst wird.
  $\Rightarrow$ Methode, die beim Eckenübergang immer eine Lösung mit kleinerem Zielfunktions-Wert liefert (falls das Minimum noch nicht erreicht ist) :
  Entweder von Anfang an, oder ab einer Entartung wird das Tableau erweitert :

$BV \setminus NBV$	$x_{\lambda_{m+1}}$	$\cdots$	x_{λ_n}		$\rightarrow$ *Erweiterung*			
x_{λ_1}	$a'_{1,m+1}$	$\cdots$	$a'_{1,n}$	$b'_{1,0}$	$b'_{1,1}$	$\cdots$	$b'_{1,m}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	*vektorielle ZF*
x_{λ_m}	$a'_{m,m+1}$	$\cdots$	$a'_{m,n}$	$b'_{m,0}$	$b'_{m,1}$	$\cdots$	$b'_{m,m}$	
	c'_{m+1}	$\cdots$	c'_n	Z'_0	Z'_1	$\cdots$	Z'_m	

Die Zielfunktion bleibt : $Q = c_1x_1 + ... + c_nx_n$
Die Vergleichbarkeit $a < b$, $a = b$, $a > b$ ist bei Vektoren nicht mehr gegeben.

Beispiel für Erweiterung :

$$I \in \mathbb{R}^{(m,m)} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & & \vec{0} \\ & \ddots & \\ \vec{0} & & 1 \end{pmatrix}$$

Es liegt also für jede der $m+1$ rechten Seiten ein lineares Optimierungsproblem vom Typ3 vor.
Jedes Tableau beschreibt einen Eckpunkt : $(k = 0, ..., m)$

$$\underbrace{x_{\lambda_{m+1}}, ..., x_{\lambda_n = 0}}_{NBV\ (unveraendert)} \ , \ \underbrace{x_{\lambda_1} = b'_{1,k}, ..., x_{\lambda_m} = b'_{m,k}}_{BV\ (werden\ anders\ dargestellt)}$$

- Simultane Durchführung des Simplex-Algorithmus für alle rechten Seiten $(k = 0, ..., m)$. Die neuen rechten Seiten werden einfach mittransformiert.

- Bestimmung des Pivotelementes :

$\alpha : \quad c'_\alpha < 0$
$\beta : \quad \min\limits_{a'_{\mu,\alpha}} \frac{b'_{\mu,0}}{a'_{\mu,\alpha}} = \frac{b'_{\beta,0}}{a'_{\beta,\alpha}}$ $\qquad$ (β ist evt. nicht eindeutig bestimmt)

Bei Nicht-Entartung : $Q^* < Q^0 \qquad (-Z_0^* < -Z_0^0 \Leftrightarrow Z_0^* > Z_0^0)$

Bei Entartung : ZF-Wert Z_0^* in mehreren Tableaus hintereinander konstant ! (Kreisen)
Dies wird durch folgende Auswahlvorschrift ausgeschlossen :

$\alpha : \quad c'_\alpha < 0 \qquad$ (Bestimmung von α bleibt gleich)
$\beta : \quad Lex \min\limits_{a'_{\mu,\alpha} > 0} \left(\frac{b'_{\mu,0}}{a'_{\mu,\alpha}}, \frac{b'_{\mu,1}}{a'_{\mu,\alpha}}, ..., \frac{b'_{\mu,m}}{a'_{\mu,\alpha}} \right) = \left(\frac{b'_{\beta,0}}{a'_{\beta,\alpha}}, \frac{b'_{\beta,1}}{a'_{\beta,\alpha}}, ..., \frac{b'_{\beta,m}}{a'_{\beta,\alpha}} \right)$

Def. 3.2 : Vergleichbarkeit von Vektoren
geg.: $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{m+1}$
$w_1 \succ w_2 \quad \Leftrightarrow \quad w_{1,0} = w_{2,0}\ ,\ ...\ ,\ w_{1,\nu} = w_{2,\nu}$ und $w_{1,\nu+1} > w_{2,\nu+1}$
mit $\quad -1 \leq \nu \leq m-1$
$\hat{=} w_1$ ist lexikographische größer als w_2
($\prec$ analog)

Beispiel 1 :

Ein Vektor $w \in \mathbb{R}^{m+1}$ heißt lexikographisch positiv, wenn $w \neq \vec{0}$ und die erste nichtverschwindende Komponente > 0 ist.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \succ \vec{0}$, also lexikographisch positiv

Beispiel 2 :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ , \ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$w_1 \prec w_2 \prec w_4 \prec w_3$

Bemerkung 1 :
Die lexikographische Ordnung gemäß Def. 3.2 besitzt folgende Eigenschaften :

1. Für $u, w \in \mathbb{R}^{m+1}$ gilt genau eine der Relationen : $u \prec w$, $u = w$, $u \succ w$
2. $u \prec v$, $v \prec w \Rightarrow u \prec w$ (Transitivität)
3. $u \prec w; \Rightarrow u + v \prec w + v$ (Monotonie der Addition)
4. $\lambda > 0$, $u \prec w \Rightarrow \lambda u \prec \lambda w$ (Monotonie der Vielfachbildung)

Bemerkung 2 :
Unter endlich vielen verschiedenen Vektoren gibt es genau einen lexikographisch kleinsten. (Man sucht die Vektoren mit minimalem 1. Koeffizienten, unter diesen diejenigen mit minimalem 2. Koeffizienten , usw.)

Satz 3.2 :
Sind die Zeilenvektoren der rechten Seiten linear unabhängig, so auch die sich ergebenden Zeilenvektoren im nächsten Tableau.

Beweis : Da bei der Transformation nur die elementaren Umformungen auftreten, bleibt der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} b'_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b'_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b'_{m,0} & b'_{m,1} & \cdots & b'_{m,m} \end{pmatrix}$ erhalten und damit auch die Zeilenunabhängigkeit.

Satz 3.3 :
Die Wahl von β ist stets eindeutig, wenn die Zeilenvektoren der Erweiterung linear unabhängig sind.

Beweis :
Annahme : Gäbe es zwei kleinste Vektoren, so müssten diese gleich sein.
$\frac{1}{a'_{\mu,\alpha}}(b'_{\mu 0}, b'_{\mu 1}, ..., b'_{\mu m}) = \frac{1}{a'_{\gamma,\alpha}}(b'_{\gamma 0}, b'_{\gamma 1}, ..., b'_{\gamma m})$
$\Rightarrow$ Lineare Abhängigkeit der Zeilen μ und γ
$\Rightarrow$ Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Zeilenvektoren in der Erweiterung.
q.e.d.

Satz 3.4 :
Sind die Zeilenvektoren der Erweiterung lexikographisch positiv und linear unabhängig, dann haben sie diese Eigenschaften auch im nächsten Tableau.

Beweis : Es ergibt sich für die neue μ-te Zeile :

$$(b^*_{\mu,0}, b^*_{\mu,1}, ..., b^*_{\mu,m}) = \begin{cases} (b'_{\mu,0}, b'_{\mu,1}, ..., b'_{\mu,m}) - \frac{a'_{\mu,\alpha}}{a'_{\beta,\alpha}}(b'_{\beta,0}, b'_{\beta,1}, ..., b'_{\beta,m}) \ , \ falls\ \mu \neq \beta \\ \frac{1}{a'_{\beta,\alpha}}(b'_{\beta,0}, b'_{\beta,1}, ..., b'_{\beta,m}) \ , \ falls\ \mu = \beta \end{cases}$$

zu zeigen :
Falls $(b'_{\mu,0}, ..., b'_{\mu,m})$ lexikographisch positiv ist, dann auch $(b^*_{\mu,0}, ..., b^*_{\mu,m})$.

a) $\underline{\mu = \beta :}$ Da $a'_{\beta,\alpha} > 0$ ist, folgt , dass $(b^*_{\mu,0}, ..., b^*_{\mu,m})$ lexikographisch positiv ist.

b) $\underline{\mu \neq \beta \ , \ a'_{\mu,\alpha} \leq 0}$ $\Rightarrow$ Wegen der Monotonie der Addition folgt, dass

$(b^*_{\mu,0}, ..., b^*_{\mu,m})$ lexikographisch positiv ist.

c) $\underline{\mu \neq \beta \text{ , } a'_{\mu,\alpha} > 0}$ $\Rightarrow$ Wegen der Auswahlvorschrift für β folgt :

$$\underbrace{\frac{1}{a'_{\beta,\alpha}}}_{<0}(b'_{\beta,0}, ..., b'_{\beta,m}) \prec \underbrace{\frac{1}{a'_{\mu,\alpha}}}_{>0}(b'_{\mu,0}, ..., b'_{\mu,m}) \quad \text{, da } \beta \text{ eindeutig ist.}$$

Multipliziert man mit $a'_{\mu,\alpha} > 0$ durch, so folgt die Behauptung auch hier.
q.e.d.

Satz 3.5 :

Sind die Zeilenvektoren der Erweiterung linear unabhängig und lexikographisch positiv, so gilt :
Der Zielvektor wird beim Übergang vom Tableau (') zum Tableau (*) stets lexikographisch größer, falls ein $c'_\alpha < 0$ existiert.

Beweis : Bei der Transformation gilt :

$$(Z^*_0, Z^*_1, ..., Z^*_m) = (Z'_0, Z'_1, ..., Z'_m) - \underbrace{\frac{c'_\alpha}{a'_{\beta,\alpha}}(b'_{\beta,0}, b'_{\beta,1}, ..., b'_{\beta,m})}_{\succ 0}$$

Wegen $Z^* = Z' + \gamma \succ Z' + 0 \quad \Rightarrow \quad Z^* \succ Z'$, d.h.

$\Rightarrow \quad (Z^*_0, Z^*_1, ..., Z^*_m) \succ (Z'_0, Z'_1, ..., Z'_m)$ q.e.d.

Bemerkung :

- Die Aussagen der Sätze 3.2 bis 3.5 gelten unabhängig von einer Entartung, auf die nirgends Bezug genommen wird.
- Da der Zielvektor lexikographisch größer wird (Satz 3.5), kann sich somit im Verfahren kein Zielvektor und kein Tableau wiederholen.
  $\Rightarrow$ kein Kreisen
  $\Rightarrow$ Verfahren endet nach endlich vielen Schritten

Beispiel für die ergänzende Matrix :

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b'_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{m,1} & \cdots & b'_{m,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \vec{0} \\ & \ddots & \\ \vec{0} & & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 3.6 : Umkehrung des Minimum-Kriteriums

Ist x^0 Minimal(eck)punkt, so gibt es eine zugehörige zulässige BL, so dass $c'_{m+1}, ..., c'_n \geq 0$ wird.
(Notwendige Optimalitätsbedingung)

Beweis :

- <u>x^0 nicht entartet :</u>
  Aussage folgt aus der Herleitung des Simplex-Algorithmus, da man sonst zu einer Ecke mit kleinerem Q übergehen könnte.

- <u>x^0 entartet :</u>
  Man findet nach einigen Schritten eine Basis zu x^0 mit lexikographisch größtem Zielfunktions-Wert $(Z_0^*, Z_1^*, ..., Z_m^*)$.
  Für diese Basis ist die Behauptung erfüllt, denn wäre $c'_\alpha < 0$, so könnte zu einem weiteren Tableau mit lexikographisch größerem ZF-Wert übergegangen werden.
  $\Rightarrow$ Widerspruch q.e.d.

Kapitel 4

Dualitätstheorie

$$\text{LOP3}: \quad \begin{array}{l} Q: \quad c^T x \to \min \\ Ax = b \ , \ \ rang(A) = m \\ x \geq 0 \end{array}$$

Betrachtung aller Schnittpunkten p^0 von $Ax = b$, die n linear unabhängige Restriktionen mit "=" erfüllen. (Die Ecken sind zulässige Schnittpunkte.)

Zu jedem Schnittpunkt p^0 gehört eine Basislösung :

$$x^0 = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} x^0_{\lambda_1} \\ \vdots \\ x^0_{\lambda_m} \end{matrix}\right\} \tilde{x}^0 \ \ (BV) \\ \\ \left.\begin{matrix} x^0_{\lambda_{m+1}} = 0 \\ \vdots \\ x^0_{\lambda_n} = 0 \end{matrix}\right\} \hat{x}^0 \ \ (NBV) \end{pmatrix}$$

Sie kann zulässig oder unzulässig sein, im Entartungsfall auch mehrdeutig.

Matrix der BasisVektoren (Basismatrix) :

$$\begin{pmatrix} a_{1,\lambda_1} & \cdots & a_{1,\lambda_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,\lambda_1} & \cdots & a_{m,\lambda_m} \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$Ax^0 = \tilde{A}\tilde{x}^0 = b \quad \Rightarrow \ \tilde{x}^0 = \tilde{A}^{-1}b$

Für einen beliebigen Vektor $u^T = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m$ folgt : $\underbrace{\tilde{A}^T u = \tilde{c}}_{Hyperebenen\ im\ \mathbb{R}^m} = (c_{\lambda_1}, ..., c_{\lambda_m})^T$

Schnittpunkt : $\quad u_0 = \left(\tilde{A}^T\right)^{-1} \tilde{c}$

Also : $\quad p^0 \xrightarrow{1)} x^0 \to u^0 \quad$ und

$$Q^0 \ = \ Q(x^0) \ = \ c^T x^0 \ = \ \tilde{c}^T \tilde{x}^0 \ = \ \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1} b \ = \ {u^0}^T b \ = \ b^T u^0$$

1) : Im Fall der Entartung <u>nicht</u> eindeutig

$\Rightarrow$ Konstruktion der zu LOP3 dualen Aufgabe :

$$\text{LOP3}^D \ : \quad \begin{array}{l} G = b^T u \longrightarrow \max \\ A^T u \leq c \end{array} \quad , \quad A^T \in \mathbb{R}^{(n,m)} \ \ , rang(A^T) = m$$

Seine "Schnittpunkte" , d.h. die p'^0 , welche m linear unabhängige Restriktionen mit "=" erfüllen , sind den Schnittpunkten des Problems LOP3 durch die Basisvektoren $\tilde{A}$ eindeutig zugeordnet.

$\tilde{x}^0 = \tilde{A}^{-1} b \ \rightarrow \ x^0 = (\tilde{x}^0, \vec{0})^T \in \mathbb{R}^n$

Zuordnung : $p'^0 \rightarrow u^0 \rightarrow x^0$
2) : Im Falle der Entartung ist der Schritt $p'^0 \rightarrow u^0$ nicht eindeutig.

Es gilt : $\quad Q^0 = Q(x^0) = G(u^0) = G^0$

$$\boxed{p^0 \rightarrow x^0 \rightleftarrows u^0 \leftarrow p'^0}$$

Das Problem LOP3^D ist vom Typ1 (=LOP1) und $rang(A^T) = m$.

Beispiel :

$\underline{LOP3:}$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ &x_1 - x_2 = 6 \\ &x_3 = 3 \\ &x_i \geq 0 \\ &A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\underline{LOP3^D:}$

$$\begin{aligned} &5u_1 + 6u_2 + 3u_3 \rightarrow \max \\ &A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \\ &2u_1 + u_2 \leq 2 \\ &u_1 - u_2 \leq 3 \\ &-u_1 + u_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Satz 4.1 (Schwache Dualitätsaussage)

Sei x ein zulässiges Element für LOP3 und u ein zulässiges Element für LOP3^D .
Dann gilt : $\quad G(u) \leq Q(x)$

Beweis :

Für beliebige zulässige Elemente x, u gilt :

$$G(u) \ = \ b^T u \ = \ u^T b \underbrace{=}_{Ax=b} u^T A x \underbrace{\leq}_{u^T A \leq c^T} c^T x \ = \ Q(x). \qquad \text{q.e.d.}$$

Gegenüberstellung :

$LOP3 \ - \ Typ3$ $Primalproblem\ (PP)$		$LOP3^D \ - \ Typ1$ $Dualproblem\ (DP)$
$Q = c^T x \to \min$ $Ax = b$ $rang(A) = m$		$G = b^T u \to \max$ $A^T u \leq c$ $rang(A^T) = m$
$P^0 : \ Ax^0 = b$	*Schnittpunkte*	$P_D^0 : \ \tilde{A}^T u^0 = \tilde{c}$

Bemerkungen :
Die Schnittpunkte erfüllen n linear unabhängige Restriktionen mit "=".
Wenn auch die übrigen Restriktionen erfüllt sind , handelt es sich um einen zulässigen Schnittpunkt.
Ist x zulässig bzgl. $LOP3$ und u zulässig bzgl. $LOP3^D$, so folgt die schwache Dualität.
$Q(x) = c^T x = x^T c \quad \geq \quad x^T A^T u = (Ax)^T u = b^T u = G(u)$

$$\underline{Q(x^0)} \ = \ \tilde{c}^T \tilde{x}^0 + \hat{c}^T \hat{x}^0 \ = \ \tilde{c}^T \tilde{x}^0 \ = \ \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1} b = \left((\tilde{A}^T)^{-1} \tilde{c} \right)^T b = (u^0)^T b \ = \ b^T u^0 \ = \ \underline{G(u^0)}$$

Skala für Q- und G-Werte

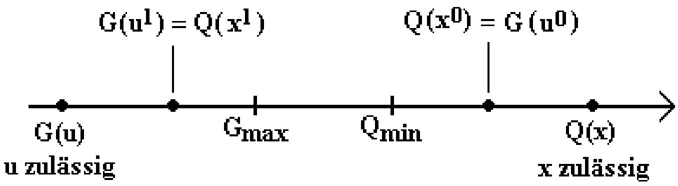


Abb. 4.1: x^1 nicht zulässig für LOP3 u^0 nicht zulässig für LOP3^D

Bemerkung :

- Jeder Zielfunktions-Wert $G(u)$ der dualen Aufgabe ist untere Schranke für beliebige Zielfunktionswerte der primalen Aufgabe.
- Jeder Zielfunktions-Wert $Q(x)$ der primalen Aufgabe ist obere Schranke für beliebige Zielfunktionswerte der dualen Aufgabe.

Folgerung : Zugeordnete Schnittpunkte sind im allgmeinen nicht bzgl. beider Probleme zulässig.

Satz 4.2 (Starke Dualität)

a) Besitzt LOP3 ein endliches Optimum , so auch LOP3^D und umgekehrt.

b) Die Optima werden in "zugeordneten" Eckpunkten x^0 und u^0 angenommen und es gilt :

$$Q_{min} \ = Q(x^0) = G(u^0) \ = G_{max}$$

Beweis :

zu a) : LOP3 habe ein endliches Minimum

$\Rightarrow$ Minimaleckpunkt x^0 und Basismatrix $\tilde{A}$
$\Rightarrow$ $u_0 = (\tilde{A}^{-1})^T \tilde{c}$ ist der zugeordnete Schnittpunkt mit $Q(x^0) = G(u_0)$

zu zeigen : u_0 ist Eckpunkt bzgl. LOP3^D
(D.h. die Zulässigkeit von u_0 bzgl. LOP3^D zeigen.)

Sei $x^0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 & (BV) \\ \hat{x}^0 & (NBV) \end{pmatrix}$, $A = (\underbrace{\tilde{A}}_{Basisanteil} , \underbrace{\hat{A}}_{NichtBasisAnteil})$ und $c = (\tilde{c}, \hat{c})^T$

$\Rightarrow$ LOP3 : Restriktionen
$\tilde{A}\tilde{x} + \hat{A}\hat{x} = b$, $\tilde{x} \geq 0$, $\hat{x} \geq 0$
Zielfunktion : $Q = \tilde{c}^T\tilde{x} + \hat{c}^T\hat{x} \rightarrow$ min!

Das Dualproblem LOP3^D hat die Gestalt :
$\begin{pmatrix} \tilde{A}^T \\ \hat{A}^T \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \hat{c} \end{pmatrix}$
Zielfunktion : $G = b^T u \rightarrow$ max!

x^0 als Eckpunkt in kanonischer Form darstellbar :
$\tilde{x} + \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x} = \tilde{A}^{-1}b$, $\tilde{x} \geq 0$, $\hat{x} \geq 0$

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{c}^T\tilde{x} + \hat{c}^T\hat{x} \\ &= \tilde{c}^T(\underbrace{\tilde{A}^{-1}b}_{x^0} - \tilde{A}^{-1}\hat{A}\hat{x}) + \hat{c}^T\hat{x} \\ &= \underbrace{\tilde{c}^T x^0}_{Q_0} + (\underbrace{\hat{c}^T - \tilde{c}^T\tilde{A}^{-1}\hat{A}}_{c'^T})\hat{x} \\ &= Q_0 + c'^T\hat{x} \end{aligned}$$

x^0 ist Minimalpunkt $\overset{Satz\ 3.6}{\Rightarrow}$ Es existiert eine zulässige Basislösung, so dass $c' \geq 0$ ist.
$\Rightarrow$ $c' = \hat{c} - \hat{A}^T(\tilde{A}^{-1})^T\tilde{c} \geq 0$
$\Rightarrow$ $\hat{A}^T(\tilde{A}^{-1})^T\tilde{c} \leq \hat{c}$
Es sollte die Zulässigkeit von u_0 überprüft werden, also Einsetzen :
$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^T \\ \hat{A}^T \end{pmatrix} u^0 = \begin{pmatrix} \tilde{A}^T \\ \hat{A}^T \end{pmatrix} \cdot (\tilde{A}^{-1})^T\tilde{c} = \begin{pmatrix} \tilde{A}^T(\tilde{A}^{-1})^T\tilde{c} \\ \hat{A}^T(\tilde{A}^{-1})^T\tilde{c} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \hat{c} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ u^0 ist zulässig für LOP3^D
$\Rightarrow$ u^0 ist Eckpunkt für LOP3^D (als zugeordneter Schnittpunkt)

$\overset{Satz\ 4.1}{\Rightarrow}$ u^0 ist Maximaleckpunkt, denn
$G(u^0) = Q(x^0) \geq G(u)$ $\forall$ dual zulässigen u
$\Rightarrow$ u^0 ist Maximaleckpunkt und $G(u^0) = Q(x^0)$. (Wegen $G_{max} = Q_{min}$)

zu b) : Sei u^0 Maximaleckpunkt von LOP3^D
$\Rightarrow$ $u = u' - u''$, $u', u'' \geq 0$
Setze den Vektor der Schlupfvariablen $v = c - A^T u \geq 0$
(Ziel : LOP3^D als Problem vom Typ3 formulieren)

$\Rightarrow$ LOP3^D geht in ein LOP3 über :

$$\begin{array}{lcc} A^T u \le c & & -A^T u' + A^T u'' - v = -c \\ G \to \max & \Longrightarrow & -G = -b^T u' + b^T u'' \to \min \\ & & u', u'', v \ge 0 \\ & & (*) \quad {\scriptstyle (= LOP\ vom\ Typ 3)} \end{array}$$

Konstruktion des zu $(*)$ dualen Problems $(*)^D$:

$$\begin{pmatrix} -A \\ A \\ -I \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} -b \\ b \\ \vec{0}_{(\in \mathbb{R}^n)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -c^T x \to \max \ .$$

Da LOP3^D eine Optimallösung hat, so auch $(*)$

$\overset{a)}{\Rightarrow}$ $(*)^D$ hat eine Optimallösung, d.h. einen Maximaleckpunkt x^0.

$(*)^D$ ist äquivalent zum Ausgangsproblem :

$\left.\begin{array}{c} -Ax \le -b \\ Ax \le b \end{array}\right\}$	$\Longrightarrow$	$Ax = b$
$-Ix \le 0$	$\Longrightarrow$	$x \ge 0$
$-c^T x \to \max$	$\Longrightarrow$	$c^T x \to \min$ $(LOP3)$

$\Rightarrow$ LOP3 hat Minimalpunkt x^0.
Da u^0 und x^0 zugeordnete Schnittpunkte sind, gilt : $G(u^0) = Q(x^0)$.
q.e.d.

Satz 4.3 (Existenzsatz)

Haben LOP3 und LOP3^D zulässige Lösungen, so besitzen beide Optimallösungen und die Optimalwerte sind gleich.

Beweis :

Sei u^1 zulässig für LOP3^D

$\overset{Satz\ 4.1}{\Rightarrow}$ $G(u^1) \le Q(x) \quad \forall$ zulässigen x.

$\Rightarrow$ Q ist nach unten beschränkt

$\Rightarrow$ Simplexmethode liefert das endliche Minimum von LOP3

$\overset{Satz\ 4.2}{\Rightarrow}$ G hat ein Maximum und die Optimalwerte sind gleich. q.e.d.

Bemerkung :

Die Existenz der Optima tritt stets gleichzeitig in beiden Problemen ein, also auch die Nichtexistenz ! Diese kann eintreten, falls :

a) zulässiger Bereich des LOP ist leer

b) Q bzw. G nicht beschränkt $\qquad (Q \to -\infty\ ,\ G \to +\infty)$

Es gilt :

	$LOP3$ *nicht leer*	$LOP3$ *leer*
$LOP3^D$ *nichtleer*	$\min Q = \max G$	$G \to +\infty$
$LOP3^D$ *leer*	$Q \to -\infty$	*keine* $G-$ *und* $Q-$*Werte*

Beweis : TODO

Beispiel :

$LOP3$:

$$Q: \quad x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = -1$$
$$x_2 - x_3 = 0 \qquad (*1)$$
$$x_i \geq 0$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$LOP3^D$:

$$G: \quad -u_1 \to \max$$
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow$$
$$u_1 \leq 1$$
$$u_1 + u_2 \leq -1 \qquad (*2)$$
$$-u_1 - u_2 \leq -1 \qquad (*3)$$

Aus (*1) folgt : $x_2 = x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$
Widerspruch zu $x_1 \geq 0$
Aus (*2) und (*3) folgt : $u_1 + u_2 \leq -1$ und $u_1 + u_2 \geq 1$
Widerspruch

Satz 4.4 ! :
Seien folgende Aussagen gegeben :

I) Ein zulässiges x^* für LOP3 ist Minimallösung.

II) Es existiert ein bzgl. LOP3^D zulässiges u^*, so dass $G(u^*) = Q(x^*)$ für ein bzgl. LOP3 zulässiges x^* gilt.

III) Es existiert eine Maximallösung u^* von LOP3^D.

Dann gilt :

$$I \Leftrightarrow II \Rightarrow III$$

(analog : LOP3^D →LOP3)

Beweis :

- $I \Leftarrow II$:
  Nach Satz 4.1 (schwache Dualität) gilt :
  $Q(x^*) = G(u^*) \leq Q(x) \quad \forall$ bzgl. LOP3 zulässigen x
  Nach Satz 4.1 gilt weiter :
  $G(u^*) = Q(x^*) \geq G(u) \quad \forall$ bzgl. LOP3^D zulässigen u.

$\Rightarrow$ u^* ist Maximallösung von LOP3^D
$\Rightarrow$ $(II \Rightarrow III)$

- $\underline{I \Rightarrow II}$:
  x^* sei Minimallösung
  $\Rightarrow$ Es existiert eine entsprechende zulässige Basislösung
  $\overset{Satz\ 4.2}{\Rightarrow}$ Es existiert ein bzgl. LOP3^D zulässiges u^* mit $G(u^*) = Q(x^*)$ q.e.d.

Satz 4.5 (Einschließungssatz) !
Sei x^* ein zulässiges Element bzgl. LOP3 und u^* ein zulässiges Element bzgl. LOP3^D.
Dann gilt :

$$G(u^*) \leq G_{max} = Q_{min} \leq Q(x^*)$$

Bemerkung
Seien x^0 und u^0 zugeordnete Schnittpunkte.
Dann gilt für diese stets : $G(u^0) = Q(x^0)$.
Sind sie zulässig, so folgt nach Satz 4.5, dass sie optimal sind.
(Alternative : Einer oder beide der zugeordneten Schnittpunkte sind nicht zulässig.)

4.1 Praktische Verwendung der Dualitätsbeziehungen

Man geht von einem Problem zu einem Dualproblem über, wenn z.B.

a) dort eine Ausgangsecke leicht erkennbar ist , oder

b) wenn absehbar ist, dass beim Dualproblem weniger Schritte im Simplex-Algorithmus zum Optimum führen.

zu b):

- Der Simplex-Algorithmus des Primalproblems (PP) geht über die Ecken des Problems LOP3.
- Der Simplex-Algorithmus des Dualproblems (DP) läuft über die Ecken des Problems LOP3^D.
- Projiziert man diesen Simplex-Algorithmus über die Zuordnung auf den (PP)-Raum, so folgt nach Satz 4.5, dass man über die nicht zulässigen Schnittpunkte des (PP) läuft.

  $$u^0 = (\tilde{A}^{-1})^T \tilde{c} \quad \longrightarrow \quad x^0 = \tilde{A}^{-1} b \qquad (*)$$

  Man nähert sich dem Optimum der primalen Aufgabe also von außen.
  Erst im Fall der Optimalität ist die optimale Zulässigkeit erreicht. (Satz 4.5)
- Die formelmäßige Rückprojektion von $(*)$ des Simplex-Algorithmus für LOP3^D über die Zuordnung bezeichnet man als Dualen Simplex-Algorithmus für (PP).
  Dieser entspricht dem Simplex-Algorithmus für LOP3^D.

4.2 Die Dualprogramme für lineare Optimierungsprobleme der Typen 1 und 2

<u>Für LOP2 :</u>

LOP2 gegeben : $\begin{array}{l} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ Q = c^T x \to \min \end{array}$, $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Einführung von Schlupfvariablen $y = (y_1, ..., y_m)^T$

<u>$\Rightarrow$ (*) (LOP vom Typ3) :</u>

$$\begin{array}{l} Ax - y = b \\ x, y \geq 0 \\ Q = c^T x + \vec{0}^T y \to \min \\ (A, -I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{duale Aufgabe zu } (*) & & LOP2^D \\ \hline G = b^T u \to \max & \Leftrightarrow & G = b^T u \to \max \\ \begin{pmatrix} A^T \\ -I_m \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} c \\ \vec{0}_m \end{pmatrix} & & A^T u \leq c \\ & & u \geq 0 \end{array}$$

Die Aufgabe LOP2^D ist wieder vom Typ 2.

Schreibt man LOP2^D in folgender Form :
$-A^T u \geq -c$
$u \geq 0$
$-G :\ \ -b^T u \to \min$
, so folgt die doppelte Dualität LOP2^{DD} mit :

$$\begin{array}{ccc} LOP2^{DD} & & LOP2 \\ \hline -c^T x \to \max & \Leftrightarrow & c^T x \to \min \\ -Ax \leq -b & & Ax \geq b \\ x \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

Es gilt also LOP2^{DD} = LOP2.

<u>Für LOP1 :</u>

$$\begin{array}{ccc} LOP1 & & LOP3^D \\ \hline Ax \geq b & \Leftrightarrow & -Ax \leq -b \\ Q = c^T x \to \min & & -c^T x \to \max \end{array} \quad ...$$

Und wegen der Dualität zwischen LOP3 und LOP3^D gilt :

$$... \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} LOP3 & & LOP1^D \\ \hline -A^T u = -c & \Leftrightarrow & A^T u = c \\ u \geq 0 & & u \geq 0 \\ -b^T u \rightarrow \min & & b^T u \rightarrow \max \end{array}$$

Bemerkung : Das Problem LOP1^D ist vom Typ3.

Übersicht :

	LOP	$Dualproblem$	
$Typ1$	$Ax \geq b$ $Q = c^T x \rightarrow \min$	$A^T u = c$ $u \geq 0$ $b^T u \rightarrow \max$	$Typ3$
$Typ2$	$Ax \geq b$ $x \geq 0$ $Q = c^T x \rightarrow \min$	$A^T u \leq c$ $u \geq 0$ $b^T u \rightarrow \max$	$Typ2$
$Typ3$	$Ax = b$ $x \geq 0$ $Q = c^T x \rightarrow \min$	$A^T u \leq c$ $b^T u \rightarrow \max$	$Typ1$

Satz 4.6 (Lemma von Farkas) !
Das System

$$I: \quad Ax = b \quad , x \geq 0$$

besitzt genau dann keine Lösung, wenn das System

$$II: \quad A^T u \leq \vec{0} \quad , \quad b^T u > 0;$$

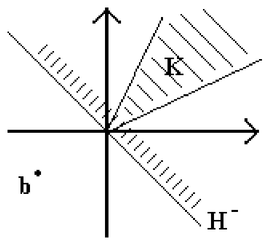
lösbar ist.

Beweis : Man betrachte die zueinander dualen Probleme
$\min\{\vec{0}^T x \ : \ \underbrace{Ax = b \ und \ x \geq 0}_{B_P}\}$ und $\max\{b^T u \ : \ \underbrace{A^T u \leq \vec{0}}_{B_D}\}$
Da $\vec{0} \in B_D$ ist, folgt : $B_D \neq \emptyset$
Das Sytem I hat genau dann keine Lösung, wenn $L_P = \emptyset$ ist.
Nach den Existenzaussagen (Folgerung aus den Dualitätssätzen)
folgt dann : G unbeschränkt auf B_D $\quad (G \rightarrow +\infty)$
Dies ist äquivalent zur Lösbarkeit des Systems II. q.e.d.

Geometrische Interpretation des Lemmas von Farkas :
Das System I besitzt genau dann keine Lösung, wenn $b \notin K := \{Ax \ : \ x \geq 0\}$ (K:Kegel).
D.h., wenn sich b nicht als nichtnegative Linearkombination der Spalten von A ausdrücken lässt.
Nach dem Lemma von Farkas hat I genau dann keine Lösung, wenn II lösbar ist.

$$I \ \ nicht \ loesbar \ \Leftrightarrow \ \exists u \ : \ A^T u \leq 0 \quad und \quad b^T u > 0 \qquad (*)$$

Definiert man mit diesem u eine Hyperebene $H := \{z \in \mathbb{R}^m \; : \; u^T z = 0\}$ durch den Nullpunkt, und den zugehörigen Halbraum $H^- := \{z \in \mathbb{R}^n \; : \; u^T z \leq 0\}$, so ist $K \subset H^-$.
(Denn $u^T z = u^T A x = \underbrace{A^T u}_{\leq 0 \text{ wegen } (*)} \underbrace{x}_{\geq 0, \text{ da } \in K} \leq 0$ und $b \notin H^-$ (wegen $(*)$))



K ⊂ H⁻

Satz 4.7

Ein lineares Ungleichungssystem $Ax \leq b$ ist genau dann lösbar, wenn für alle $u \geq 0$ mit $A^T u = 0$ gilt : $b^T u \geq 0$.

Beweis : (mit Hilfe des Lemmas von Farkas)

$$Ax \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} Ax + y = b \\ y \geq 0 \end{array} \quad \underset{x = x^1 - x^2}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{c} Ax^1 - Ax^2 + y = b \\ x^1, x^2, y \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} (A, -A, I^m) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \end{pmatrix} \geq \vec{0} \qquad (*) \end{array}$$

Nach dem Lemma von Farkas ist $(*)$ lösbar, genau dann wenn :

$$\forall u \text{ mit } \begin{pmatrix} A^T \\ -A^T \\ I^m \end{pmatrix} u \leq 0 \text{ gilt : } b^T u \leq 0 \qquad (**)$$

$$(**) \text{ entspricht : } \quad \left. \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} A^T u \leq 0 \\ -A^T u \leq 0 \end{array} \right\} A^T u = 0 \\ u \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \; b^T u \leq 0$$

$\underset{(mit\ -u\ anstelle\ von\ u)}{\Rightarrow}$: $\forall u$ mit $A^T u = 0$ und $u \geq 0$ gilt : $b^T u \geq 0$. q.e.d.

<u>Im folgenden sollen Alternativsätze (Verbindung von Aussagen durch XOR) gezeigt werden :</u>

Satz 4.8 : Entweder besitzt das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung, oder das Gleichungssystem ($A^T u = 0$, $b^T u = 1$) ist lösbar.

Beweis : zu zeigen :

1. Beide Systeme sind nicht gleichzeitg lösbar.
2. Aus der Unlösbarkeit des Systems $Ax = b$ folgt die Lösbarkeit von ($A^T u = 0$, $b^T u = 1$).

<u>zu 1.) :</u>
Annahme, dass beide Systeme gleichzeitig lösbar sind :

$1 \;=\; b^T u \overset{(Ax=b)}{=} x^T A^T u \overset{(A^T u=0)}{=} x^T \vec{0} \;=\; 0$
$\Rightarrow$ Widerspruch

zu 2.) :
$Ax = b$ ist nicht lösbar $\Leftrightarrow$ $Ax^1 - Ax^2 = b \quad , (x^1, x^2 \geq 0)$ nicht lösbar ist.
Nach dem Lemma von Farkas folgt, dass ein u existiert mit

$$\begin{array}{c} A^T u \leq 0 \\ -A^T u \leq 0 \end{array} \quad \text{und} \quad b^T u > 0$$

$\Leftrightarrow$ $\exists u$, mit $A^T u = 0$ und $b^T u > 0$
$\Leftrightarrow$ $\exists u$, mit $A^T u = 0$ und $b^T u = 1$ (Normierung)
q.e.d.

Satz 4.9 (Lösbarkeit linearer Ungleichungssysteme) !

Entweder ist $Ax \leq b$ lösbar, oder $(A^T u = 0 \;,\; b^T u = -1 \;,\; u \geq 0)$ ist lösbar.

Beweis :

zu 1.) :
$-1 \;=\; b^T u \overset{(Ax \leq b\ ,\ u \geq 0)}{\geq} x^T A^T u \overset{(A^T u=0)}{=} x^T \vec{0} \;=\; 0$
$\Rightarrow$ Widerspruch

zu 2.) :
$Ax \leq b$ ist nicht lösbar $\Leftrightarrow$ $Ax^1 - Ax^2 + y = b \quad , (x^1, x^2, y \geq 0)$ nicht lösbar ist.

$$\Leftrightarrow (A, -A, I^m) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \end{pmatrix} = b \quad , \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \text{ ist nicht lösbar}$$

$$\Leftrightarrow \exists u \;:\; \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} A^T u \leq 0 \\ -A^T u \leq 0 \end{array}\right\} A^T u = 0 \\ u \leq 0 \end{array} \quad mit\ b^T u > 0 \qquad \text{(Lemma von Farkas)}$$

$\overset{(u \to -u)}{\Longleftrightarrow} \exists u \geq 0$ mit $A^T u = 0$ und $b^T u < 0$

$\Leftrightarrow$ $\exists u \geq 0$ mit $A^T u = 0$ und $b^T u = -1$ q.e.d.

Satz 4.10 (nichtnegative Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme) !

Entweder ist $(Ax = b \quad , x \geq 0)$ lösbar, oder $(A^T u \leq 0 \;,\; b^T u > 0)$ ist lösbar.

Beweis :

zu 1.) : $0 \;<\; b^T u \overset{(Ax=b)}{=} \underbrace{x^T A^T}_{\geq 0} \underbrace{u}_{\leq 0} \;\leq\; 0 \quad \Rightarrow$ Widerspruch

zu 2.) : Lemma von Farkas anwenden :
$(Ax = b \;,\; x \geq 0)$ lösbar $\Leftrightarrow$ $A^T u \leq 0 \;,\; b^T u > 0$ nicht lösbar. q.e.d.

Satz 4.11 (nichtnegative Lösbarkeit linearer Unleichungssysteme) !

Entweder ist $(Ax \leq b \quad , x \geq 0)$ lösbar,
oder $(A^T u \geq 0 \;,\; b^T u < 0 \;,\; u \geq 0)$ ist lösbar.

Beweis :

zu 1.) : $\quad 0 > b^T u \overset{(Ax \leq b, u \geq 0)}{\geq} x^T A^T u \overset{(x \geq 0, A^T u \geq 0)}{\geq} x^T \vec{0} = 0 \quad \Rightarrow$ Widerspruch

zu 2.) :
$(Ax \leq b \;\;,\; x \geq 0)$ nicht lösbar $\iff$ $(Ax + y = b \;,\; x, y \geq 0)$ nicht lösbar
$\Leftrightarrow \;(A, I^m) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \;,\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$ nicht lösbar
$\overset{Farkas}{\iff} \;\exists u$ mit $A^T u \leq 0 \;,\; u \leq 0$ und $b^T u > 0$
$\overset{u \to -u}{\iff} \;\exists u$ mit $A^T u \geq 0 \;,\; u \geq 0$ und $b^T u < 0$
q.e.d.

Bemerkung :
Der Satz über die nichtnegative Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme (Satz 4.10) liefert ein wichtiges Resultat über schiefsymmetrische Matrizen, welches z.B. in der Dualitätstheorie angewendet werden kann.

Satz 4.12 :
Die Systeme $A^T u \geq 0$ und $Ax = 0$, $(x \geq 0)$ besitzen Lösungen u^0, x^0 mit $A^T u^0 + x^0 > 0$.

Beweis : $A = (a_1, ..., a_n)$ ... TODO

Satz 4.13 :
Sei A schiefsymmetrisch (d.h. $A^T = -A$ bzw. $A = -A^T$).
Dann existiert ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit : $Ax \geq 0 \;,\; x \geq 0 \;,\; Ax + x > 0$.

Beweis : Wir betrachten das System $\begin{pmatrix} A \\ I^n \end{pmatrix} y \geq 0$ und $(-A, I^n) \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = 0 \;,\; \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \geq 0$

Nach Satz 4.12 existieren Lösungen y^0, w^0, z^0 mit :
$y^0 \geq 0 \;,\; Ay^0 \geq 0 \;,\; -Aw^0 + I^n z^0 = 0 \;,\; w^0 \geq 0 \;,\; z^0 \geq 0 \;,\; Ay^0 + w^0 > 0$ und $y^0 + z^0 > 0$.

$\Rightarrow \; z^0 = Aw^0$
$\Rightarrow \; y^0 + Aw^0 > 0$

Setze $x^0 = y^0 + w^0$:
$$Ax^0 = \underbrace{Ay^0}_{\geq 0} + Aw^0 \;\geq\; Aw^0 \;=\; z^0 \;\geq\; 0$$
$\Rightarrow \; Ax^0 \geq 0$

$$Ax^0 + x^0 \;=\; Ay^0 + Aw^0 + y^0 + w^0 \;=\; \underbrace{Ay^0 + w^0}_{>0} + \underbrace{Aw^0 + y^0}_{>0} \;>\; 0$$

q.e.d.

Kapitel 5

Ökonomische Interpretation der Dualität

Produktionsplanungsmodell :
Unter Kapazitätsbeschränkungen an benötigte Hilfsmittel will ein Unternehmen einen Produktionsplan aufstellen, der einen maximalen Gesamtgewinn liefert.

$$\begin{array}{c} Q = c^T x \to \max \\ x \geq 0 \\ Ax \leq b \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} Q = -c^T x \to \min \\ x \geq 0 \\ -Ax \geq -b \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} -b^T u \to \max \\ u \geq 0 \\ -A^T u \leq -c \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} G = b^T u \to \min \\ u \geq 0 \\ A^T u \geq c \\ (duales\ Problem) \end{array}$$

Interpretation des dualen Problems :
Ein Konkurrent bietet an, sämtliche Hilfsmittel zu kaufen oder zu mieten und bietet hierzu für das i-te Hilfsmittel $u_i \geq 0$ Geldeinheiten pro Einheit.
Insgesamt sind seine Kosten $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i u_i$ und diese wird er versuchen zu minimieren.
Der Unternehmer geht auf dieses Angebot nur unter den Bedingungen
$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{i,j} u_i \geq c_j \quad ,(j = 1, ..., n)$ ein, d.h. wenn der gezahlte Preis für sämtliche Hilfsmittel, die zur Produktion einer Einheit des j-ten Produktes nicht kleiner ist als der Reingewinn c_j, den das Unternehmen erhalten hätte, falls es die Produktion selbst durchgeführt hätte.
$\Rightarrow$ Der Konkurrent hat folglich das duale Problem zu lösen.

Interpretation des schwachen Dualitätssatzes :
Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein zulässiger Produktionsplan für das Unternehmen und $u \in \mathbb{R}^m$ ein akzeptables Angebot des Konkurrenten, so gilt : $c^T x \leq b^T u$, d.h. das Unternehmen kann keinen größeren Reingewinn erzielen, als den Betrag, den es bei einem akzeptablen Angebot des Konkurrenten erhalten würde.

Interpretation des starken Dualitätssatzes :
Der maximale Reingewinn eines Unternehmens ist gleich den minimalen Kosten des Konkurrenten (wenn zulässige Produktionspläne und akzeptable Angebote des Konkurrenten existieren.)

Aussage des Satzes :
Ist x^* ein optimaler zulässiger Produktionsplan mit dem Reingewinn $c^T x^*$, so gibt es ein optimales zulässiges (akzeptables) Angebot des Konkurrenten :
u^* mit den Kosten $b^T u^* = c^T x^*$

Herleitung von Gleichheitsbedingungen :
$c^T x^* \;\leq\; (A^T u^*)^T x^* \;=\; (u^*)^T A x^*$
Wegen des starken Dualitätssatzes gilt :
$I \;:\quad (A^T u^* - c)^T x^* = 0$ und
$II \;:\quad (b - Ax^*)^T u^* = 0$
(Gleichgewichtsbedingungen)

- Wird in einem optimalen Produktionsplan x^* das j-te Produkt hergestellt, (ist also $x_j^* > 0$), so folgt notwendigerweise $(A^T u^*)_j = c_j$
- Wird für einen optimalen Produktionsplan x^* die Kapazitätsbeschränkung für das i-te Hilfsmittel nicht voll ausgelastet, (d.h. $(Ax^* - b)_i < 0 \quad ; \quad (Ax^*)_i < b_i$) , so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung II, dass der Konkurrent für das i-te Hilfsmittel nichts zahlen wird ($u_i^* = 0$) (in einem für ihn optimalen Programm).

Weitere Interpretation der Dualität : Sensitivitätsanalyse :
Gegeben : Lineares Optimierungsproblem vom Typ3 :

$$\begin{array}{c} c^T x \to \min \\ x \geq 0 \\ Ax = b \end{array} \quad , \; x \in \mathbb{R}^n \;\; , \; A \in \mathbb{R}^{(m,n)} \;\; , \; rang(A) = m \;\; , \; b \in \mathbb{R}^m$$

Annahme : Das Simplexverfahren bricht man nach endlich vielen Schritten an einer nichtentarteten Optimallösung x^* ab.
$\Rightarrow$ Basismatrix $\tilde{A}$, Basisvektor $\tilde{x}^* = \tilde{A}^{-1} b$
$\Rightarrow \; u^* = (\tilde{A}^{-1})^T \tilde{c}$
$\Rightarrow \; u^*$ ist Optimallösung des dualen Problems $\begin{array}{c} b^T u \to \max \\ A^T u \leq c \end{array}$

Ist $\Delta b \in \mathbb{R}^m$ eine so kleine Störung (Veränderung) der rechten Seite der Restriktionen im Primalproblem, so dass $\tilde{A}^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$, so ist $x^0 := \begin{pmatrix} \tilde{A}^{-1}(b + \Delta b) \\ \vec{0} \end{pmatrix}$

eine optimale zulässige Basislösung des gestörten Problems $\begin{array}{c} c^T x \to \min \\ x \geq 0 \\ Ax = b + \Delta b \end{array}$, denn aus den

Dualitätssätzen folgt : $c^T x^0 \;=\; \tilde{c}^T \tilde{A}^{-1}(b + \Delta b) \;=\; (b + \Delta b)^T u^*$
(x^0 ist Optimallösung des gestörten Problems.)

Insbesondere gilt :
$c^T x^0 \;=\; (b + \Delta b)^T u^* \;=\; c^T x^* + (\Delta b)^T u^*$ (für hinreichend kleine Δb)

Bemerkung : In den Wirtschaftswissenschaften werden die dualen Variablen u auch als Schattenpreise bezeichnet.

Kapitel 6

Das Transportproblem

6.1 klassisches Modell

An m verschiedenen Lagerstellen lagern die Mengen $a_i > 0 \quad , (i = 1, ..., m)$ eines bestimmten Produktes und an n verschiedenen Orten besteht der Bedarf $b_j > 0 \quad , (j = 1, ..., n)$ an diesen Produkten.

Annahme : Gesättigtes Problem : Gesamtlager = Gesamtbedarf

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$x_{i,j}$: Transport der Menge $x_{i,j}$ von Lager i zum Ort $j \quad , \; x_{i,j} \geq 0$
$c_{i,j}$: Transportkosten für eine Mengeneinheit beim Transport von Lager i zum Ort j

Problem : Das Lager bei minimalen Kosten zu räumen und den Bedarf vollständig zu befriedigen !

$$Q = \sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j} \quad {\scriptstyle (=c^T x)} \qquad \longrightarrow \min$$

$$, \text{ wobei : } \quad \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \quad , (i = 1, ..., m) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \quad , (j = 1, ..., n)$$

$$x, c \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \quad , \; x \geq 0$$

Restriktionen : $Ax = b \quad , \; b \in \mathbb{R}^{m+n} \quad , \; A \in \mathbb{R}^{(m+n \;,\; m \cdot n)}$ - sehr groß !
$\Rightarrow$ Man erhält ein lineares Optimierungsproblem vom Typ3 :

$$Q = c^T x \rightarrow \min$$
$$x \geq 0$$
$$Ax = b$$

$$
A = \underbrace{\left(\begin{array}{c|cccc|cccc|c|cccc|c}
 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}=a_1 \\
m & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^{n} x_{2,j}=a_2 \\
 & & \dots & & & & \dots & & & & & \dots & & & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & 1 & \dots & 1 & \sum_{j=1}^{n} x_{m,j}=a_m \\
\hline
 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^{m} x_{i,1}=b_1 \\
n & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^{m} x_{i,2}=b_2 \\
 & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \dots \\
 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & & 0 & 0 & \dots & 1 & \sum_{i=1}^{m} x_{i,n}=b_n \\
 & \multicolumn{4}{c|}{\underbrace{\hphantom{1\ 1\ \dots\ 1}}_{je\ n\ Spalten}} & & & & & & & & & &
\end{array}\right)}_{m\ Bloecke\ zu\ je\ n\ Spalten}
$$

Aufgrund der einfachen Struktur von A versucht man nun den Simplex-Algorithmus zu vereinfachen.

Eigenschaften von A :

1.) $rang(A) = m + n - 1$
Beweis :
Umformen ergibt $det(A) \neq 0$
Desweiteren hat A $m + n$ Zeilen, aber es gilt :
$\sum_{r=1}^{m} a_{r,s} - \sum_{r=m+1}^{m+n} a_{r,s} = 0 \quad ,(s = 1, ..., m \cdot n)$

$\Rightarrow$ Alle Zeilen der Koeffizientenmatrix A sind voneinander linear abhängig.
$\Rightarrow$ $rang(A) = m + n - 1$ q.e.d.

Bemerkung : Die Gleichungen $Ax = b$ sind also genau dann lösbar, wenn die rechten Seiten die gleichen Abhängigkeiten aufweisen, d.h. wenn gilt :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Streichen der letzten Zeile in A liefert :
Lineares Optimierungsproblem vom Typ3 für das Transportproblem (mit regulärer Koeffizientenmatrix) :
$\bar{A}x = \bar{b}$, $x \geq 0$, $c^T x \to \min$

2.) Jede Matrix von Basisspaltenvektoren von $\bar{A}$ hat Dreiecksgestalt (bei geeigneter Anordnung der Zeilen und Spalten).
Betrachte $\bar{A}x = \bar{b}$ und schreibe dieses System in Form

eines "magischen Rechtecks" :

$$\begin{array}{ccccc|c|c}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +\dots & & +x_{1n} & = a_1 \\
x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +\dots & & +x_{2n} & = a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\underbrace{x_{m1}}_{=b_1} & +\underbrace{x_{m2}}_{=b_2} & +\underbrace{x_{m3}}_{=b_3} & +\dots & & +\underbrace{\underbrace{x_{mn}}_{=b_n}}_{weglassen} & = a_m
\end{array}$$

Bemerkung : Eine Zeilen- oder Spaltengleichung enthält nur eine Basisvariable (wegen $rang(A) = m + n - 1$)

3.) Sind a_i und b_j ganzzahlig, so auch die Werte der Basisvariablen (Denn : Jede Basismatrix ist unimodular (det=±1))

4.) Simplex-Multiplikatoren $\Pi \in \mathbb{R}^n$:
Sei $\begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$, $c^T x \to \min$ und sei $x^0 = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \hat{x} \end{pmatrix}$ eine Basislösung davon.

$$\begin{aligned}
\tilde{A}\tilde{x} + \hat{A}\hat{x} &= b \qquad |\Pi^T \cdot () \text{ und Gleichungen subtrahieren} \\
\tilde{c}^T \tilde{x} + \hat{c}^T \hat{x} &= Q \\
\left(\tilde{c}^T - \Pi^T \tilde{A}\right) \tilde{x} + \left(\hat{c}^T - \Pi^T \hat{A}\right) \hat{x} &= Q - \Pi^T b \\
&= Q - Q^0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Bestimmungsgleichung für die Simplexmultiplikatoren (zugeordneter Schnittpunkt) : $\tilde{A}^T \Pi = \tilde{c}$

$\Longrightarrow$ $\Pi = (\tilde{A}^T)^{-1} \tilde{c}$ (Darstellung der Simplex-Multiplikatoren)
($(\tilde{A}^T)^{-1}$ existiert unter den gegebenen Voraussetzungen)
Π wird im allgemeinen für das Dualproblem nicht zulässig sein.

<u>Optimalitätskriterium für eine zulässige Basislösung :</u>
(Die Koeffizienten der NichtBasisVariablen müssen ≥ 0 sein.)

$$\hat{c}^T - \Pi^T \hat{A} \geq 0$$

Minimum wird für diese Basislösung angenommen.
Die Matrix $\tilde{A}^T$, welche in der Bestimmungsgleichung für die Simplexmultiplikatoren auftritt, ist beim Transportproblem eine Dreiecksmatrix.
Damit ist es beim Transportproblem auf einfache Weise möglich, die Simplex-Multiplikatoren zu gewinnen.

<u>Voruntersuchung für das Simplex-Verfahren beim Transportproblem :</u>
Sei $\Pi^T = (u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_{n-1}, v_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ der Vektor der Simplex-Multiplikatoren.

Dann gilt :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j}^{m,n} c_{i,j}x_{i,j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}}_{a_i} - \sum_{j=1}^{n-1} v_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{i,j}}_{b_j} \\
&= \sum_{i,j} c'_{i,j}x_{i,j} \qquad mit\ \ c'_{i,j} := c_{i,j} - u_i - v_j \quad und\ \ v_n = 0 \\
&= Q - Q^0 \\
&= Q \underbrace{- \sum_{i=1}^{m} u_i a_i - \sum_{j=1}^{n} v_j b_j}_{-\Pi^T b}
\end{aligned}$$

Sei $x_{i,j}$ Basisvariable. Die Bedingung für die Simplexmultiplikatoren liefert $u_i + v_j = c_{i,j}$ $(*)$
(folgt aus $\tilde{A}^T \Pi = \tilde{c}$)
$(*)$ hat Dreiecksgestalt Ganzzahligkeit (bei Dreiecksauflösung)
$\Rightarrow$ Zur Basis gehört das kanonische System

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{A}}\tilde{x} + \hat{\hat{A}}\hat{x} &= \bar{b} \\
\tilde{x} + \tilde{\tilde{A}}^{-1}\hat{\hat{A}}\hat{x} &= \tilde{\tilde{A}}^{-1}\bar{b} \\
\tilde{x} + \hat{\hat{A}}'\hat{x} &= \bar{b}'
\end{aligned}$$

($\hat{\hat{A}}'$ und $\bar{b}'$ erscheinen in den Simplextableaus)

Ein Algorithmus zur Lösung des Transportproblems :

- Es sei eine Basis (ein Eckpunkt gegeben).
  Die zugehörigen Basisvariablen werden durch Eintragen ihrer Werte in eine $x_{i,j}$-Tabelle markiert.
  (Diese Tabelle sei dem "magischen Rechteck" nachgebildet.)
- Dazu wird eine gleichgroße Tabelle der $c_{i,j}$ (geändert mit den entsprechenden Simplex-Multiplikatoren $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n$) erstellt, wobei die $c_{i,j}$ aus der gegebenen Zielfunktion an die BV-Plätze geschrieben werden.

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_{i,j} & & & & & \\
\hline
 & x_{1,2} & & & x_{1,n} & a_1 \\
x_{2,1} & & x_{2,3} & & & a_2 \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & x_{m,3} & & x_{m,n} & a_m \\
\hline
b_1 & b_2 & b_3 & & b_n & b_j \backslash a_i
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{cccccc|c}
\multicolumn{6}{l}{c_{ij}\ \ und\ \ c'_{ij}} & \\
\hline
c'_{11} & c_{12} & c'_{13} & & & c_{1n} & u_1 \\
c_{21} & c'_{22} & c_{23} & & & c'_{2n} & u_2 \\
\vdots & & & \ddots & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & \\
c'_{m1} & c'_{m2} & c_{m,3} & & & c_{m,n} & u_m \\
\hline
v_1 & v_2 & v_3 & & & v_n & v_j \backslash u_i
\end{array}$$

(alle c_{ij} sollen Nullen darstellen)

Die c'_{ij} werden berechnet durch : $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ und in die c'_{ij}-Tabelle eingetragen.
Dabei ergeben sich die u_i, v_j aus (*) durch Dreiecksauflösung :
$u_i + v_j = c_{ij}$ für die eingetragenen c_{ij} , $v_n = 0$!

$\Longrightarrow$ Diese Tabelle liefert die gleichen Informationen wie das Simplextableau
Minimum-Test ist durchzuführen :

$$\text{Minimum erreicht} \xleftarrow{ja} \boxed{c'_{ij} \geq 0} \xrightarrow{nein} \text{Basisübergang}$$

- <u>Basisübergang :</u>
  $\min\limits_{i,j} c'_{ij} = c'_{st}$ (s,t = Stelle für alte NBV)
  Es wird x_{st} neu in die Basis eingeführt.
  Dazu wachse x_{st} auf $x'_{st} = \delta \geq 0$.

  Da im kanonischen System $\tilde{x} + \tilde{\bar{A}}^{-1}\hat{\bar{A}}\hat{x} = \bar{b}'$ gelten muss, berechnet man die Änderungen der alten BV-Werte folgendermaßen : $\tilde{x} + \Delta\tilde{x} + \underbrace{\hat{\bar{A}}'}_{Spalte\ st} \delta = \bar{b}'$
  Diese Spalte $\hat{\bar{A}}'$ enthält nur die Zahlen 0,1,-1.

  Wegen $\underbrace{\tilde{x}}_{alte\ BV} = \bar{b}'$ folgt : $\Delta\tilde{x} + \hat{\bar{A}}'\delta = 0$.
  Also kann $\Delta\tilde{x}$ nur die Werte $0, \delta, -\delta$ in den Komponenten enthalten.

  Dieses System wird von der x_{ij}-Tabelle dargestellt, wenn $x_{st} = \delta$ eingetragen ist.
  Man findet $\Delta\tilde{x}$ durch Dreiecksauflösung : $\tilde{\bar{A}}\Delta\tilde{x} + \hat{\tilde{x}} \cdot (0, ..., \underbrace{\delta}_{st}, ..., 0)^T = 0$

- <u>Bestimmung von $\delta \geq 0$:</u>
  $\tilde{x} + \Delta\tilde{x} \geq 0$ bleibe bestehen, jedoch muss mindestens eine der neuen Komponenten $= 0$ werden. (Ziel : Eckenübergang)
  Man sucht also $\min\limits_{i,j} x_{ij} = x_{\sigma\tau}$ (Festlegung von $\delta = x_{\sigma\tau}$)

  $\Longrightarrow$ Anlegen einer neuen x_{ij}-Tabelle, in welche die neuen BV eingetragen werden.
  Neu in der Basis : $x'_{st} = \delta$ (neue BV)
  Aus der Basis entfernt : $x_{\sigma\tau}$
  Im Algorithmus sind wir wieder an der Stelle, an der die c_{ij}-Tabelle anzulegen ist.

- Tritt bei Basisvariablen der Wert 0 auf , so handelt es sich um eine Entartung (Literatur : Dantzig)

- Das Transportproblem besitzt ein endliches Minimum, da der zulässige Bereich stets beschränkt und nicht leer ist :

  a) zulässiger Bereich $\neq \emptyset$:
  Da $\sum_i a_i = \underbrace{\sum_j b_j}_{=:p} > 0$ gilt , ist $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{p}$ $\quad (i = 1, ..., m \quad j = 1, ..., n)$
  eine zulässige Lösung :

$$\underbrace{\sum_j x_{ij}}_{Raeumung\ des\ Lagers} = \sum_j \frac{a_i b_j}{p} = \frac{a_i p}{p} = a_i$$

$$\underbrace{\sum_j x_{ij}}_{vollst.\ Befriedigung\ des\ Bedarfs} = \sum_i \frac{a_i b_j}{p} = \frac{p b_j}{p} = b_j$$

  b) Beschränktheit des zulässigen Bereichs :
  s, t beliebig : $0 \leq x_{st} \leq \sum_j x_{sj} = a_s$

6.2 Bestimmung einer Anfangslösung (Basislösung) beim Transportproblem

6.2.1 Nord-West-Ecken-Regel

- Eine Basislösung müsste mindestens $n \cdot m - \underbrace{(n + m - 1)}_{rang(A)}$ Nullen enthalten.
- Fände man eine zulässige Lösung (x_{ij}) mit $n \cdot m - (n + m - 1)$ Nullen und ließe sich das Gleichungssystem $\bar{A}x = \bar{b}$, $(x \geq 0$, $c^T x \to \min)$ nach den restlichen $(n + m - 1)$ Variablen auflösen (dies ist insbesondere möglich, wenn Dreiecksauflösung vorliegt) , so hätte man eine zulässige Basislösung gefunden.
  (Eindeutig, da $rang(\bar{A}) = n + m - 1)$

Erzeugung einer Basislösung :
Man deklariert x_{11} als Basisvariable :

1.) Falls $a_1 \leq b_1$, so wird die restliche Zeile $x_{12}, x_{13}, ..., x_{1n}$ als die NBV gesetzt.

2.) Falls $a_1 > b_1$, so wird die restliche Spalte $x_{21}, x_{31}, ..., x_{m1}$ als die NBV gesetzt.

Jetzt errechnet sich x_{11} (Wert der BV x_{11}) zu 1.) als a_1 , oder zu 2.) als b_1.
Auf jeden Fall sind beide Werte zulässig, da nach Voraussetzung $a_1 > 0$ und $b_1 > 0$.

Nun setzt man den Wert von x_{11} ein :
1.) in die 1. Spalte
2.) in die 1. Zeile
bringt ihn
1.) auf die untere Seite
2.) auf die rechte Seite
und streicht
1.) die 1. Zeile
1.) die 1. Spalte

Die entstandene x_{ij}-Tabelle eschreibt die restlichen Gleichungen vollständig.
Es bleiben $(n+m-2)$ Gleichungen übrig.
Die reduzierte Tabelle hat die gleiche Struktur wie die ursprüngliche Tabelle.
Die "rechten" und "unteren" Seiten bleiben weiterhin nicht-negativ.

Wiederholung der Prozedur (Nord-West-Ecken-Regel) mit dem reduzierten Schema.
Das Verfahren endet mit folgender Alternative :

a) Die letzte Zeile bleibt übrig :

$$\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} & a_1 = a_1^* \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,n-1} & x_{2n} & a_2 = a_2^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m,n-1} & x_{mn} & a_m = a_m^* \\
\hline
\overset{=b_1^*}{b_1} & \overset{=b_2^*}{b_2} & \dots & \overset{=b_{n-1}^*}{b_{n-1}} & & \sum_{j=1}^{n-1} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Letzte Zeile} : BV \begin{cases} x_{m,s} = b_s^* \\ x_{m,n-1} = b_{n-1}^* \\ x_{m,n} = a_m^* - x_{m,s} - \dots - x_{m,n-1} \quad > 0 \end{cases}$$

b) Die letzte Spalte bleibt übrig :

$$\begin{array}{c|c|}
x_{tn} & a_t^* \\
\vdots & \vdots \\
x_{mn} & a_{mn}^* \\
\hline
 & \\
\hline
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung : $x_{t,n} = a_t^*, ..., x_{m,n} = a_m^*$

In jedem Fall (a) oder b)) hat man in den $n+m-1$ Gleichungen jeweils eine Basisvariable bestimmt.
$\Rightarrow$ $n+m-1$ Basisvariablen.

6.3 Beispiel zum Transportproblem

$m = 3$ (Lagerstellen) , $n = 4$ (Orte) , $b = (\underbrace{6, 2, 2}_{a_1, a_2, a_3\ (m)} , \underbrace{2, 4, 3, 1}_{b_1, \dots, b_4 (n)})^T$, $c_{ij} : \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$

Anzahl der BV : $m+n-1 = 6$

<u>1. Basislösung :</u>

$$x_{ij} : \begin{array}{|cccc|c|}
\hline
2 & 4 & & & 6 \\
 & 0 & 2 & & 2 \\
 & & 1 & 1 & 2 \\
\hline
2 & 4 & 3 & 1 & b_j \backslash a_i \\
\hline
\end{array}$$

- links oben anfangen (NW-Regel)

Zwischenschritt :

c_{ij} :

$\boxed{1}$	$\boxed{5}$			8
	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$		4
		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	2
-7	-3	-1	$0_{(=v_n=0)}$	$v_j \backslash u_i$

- wo Werte in der x_{ij}-Tabelle stehen, werden die entsprechenden c_{ij}-Werte eingetragen
- die u_i, v_j werden mittels $u_i + v_j = c_{ij}$ durch Dreiecksauflösung berechnet

(z.B. $u_3 + v_4 = u_3 = c_{34} = 2 \Rightarrow u_3 = 2$, $u_3 + v_3 = 1 \ \Rightarrow v_3 = -1$, usw.)

c_{ij} , c'_{ij} :

$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	-5	-5	8
3	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	-2	4
7	1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	2
-7	-3	-1	$0_{(=v_n=0)}$	$v_j \backslash u_i$

- Die c'_{ij} werden nun mittels $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ berechnet (die c_{ij} aus Anfangstabelle)

(z.B. $c'_{13} \ = \ c_{13} - u_1 - v_3 \ = \ 2 - 8 + 1 \ = \ -5$)

<u>Minimumtest :</u>

Ist nicht erfüllt, da nicht alle $c'_{ij} \geq 0$

$\min\limits_{i,j} c'_{ij} = -5$: δ einführen (wieder in der $x_{ij} - Tabelle$)

x_{ij} :

2	$4-\delta$		δ	6
	$0+\delta$	$2-\delta$		2
		$1+\delta$	$1-\delta$	2
2	4	3	1	$b_j \backslash a_i$

- δ hätte auch eine Zelle weiter links stehen können
- Zeilen- und Spaltensumme muss erhalten bleiben $(+\delta, -\delta, 0)$
- $0 + \delta \Rightarrow$ entartet (siehe auch 11. Übungsserie)

<u>Bestimmung von δ :</u>

$\min\limits_{i,j} x_{ij} \ = \ \min\{4, 2, 1\} \ = \ 1$

$\Rightarrow \delta = x_{34} = 1 \qquad\qquad$ mit $\Delta\tilde{x}_{ij} = -\delta$

Neue x_{ij}-Tabelle :

x_{ij} :

2	3		1	6
	1	1		2
		2		2
2	4	3	1	$b_j \backslash a_i$

c_{ij} , c'_{ij} :

$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	-5	$\boxed{3}$	3
3	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	3	-1
7	1	$\boxed{1}$	5	-3
-2	2	4	$0_{(=v_n=0)}$	$v_j \backslash u_i$

<u>Minimumtest :</u>

Ist nicht erfüllt, da nicht alle $c'_{ij} \geq 0$

$\min\limits_{i,j} c'_{ij} = -5$: δ

$$x_{ij}:\quad \begin{array}{|cccc|c|}\hline 2 & 3-\delta & \delta & 1 & 6\\ & 1+\delta & 1-\delta & & 2\\ & & 2 & & 2\\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 & b_j\backslash a_i\\ \hline\end{array}$$

<u>Bestimmung von δ :</u>

$\min\limits_{i,j} x_{ij} \; = \; \min\{3,1\} \; = \; 1$

$\Rightarrow \delta = x_{23} = 1 \qquad$ mit $\Delta\tilde{x}_{ij} = -\delta$

Neue x_{ij}-Tabelle :

$$x_{ij}:\quad \begin{array}{|cccc|c|}\hline 2 & 2 & 1 & 1 & 6\\ & 2 & & & 2\\ & & 2 & & 2\\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 & b_j\backslash a_i\\ \hline\end{array}$$

$$c_{ij}\ ,\ c'_{ij}:\quad \begin{array}{|cccc|c|}\hline \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{2} & \boxed{3} & 3\\ 3 & \boxed{1} & 5 & 3 & -1\\ 2 & -4 & \boxed{1} & 0 & 2\\ \hline -2 & 2 & -1 & 0_{(=v_n=0)} & v_j\backslash u_i\\ \hline\end{array}$$

<u>Minimumtest :</u>

nicht erfüllt , $\min\limits_{i,j} c'_{ij} = -4 \; : \; \delta$

$$x_{ij}:\quad \begin{array}{|cccc|c|}\hline 2 & 2-\delta & 1+\delta & 1 & 6\\ & 2 & & & 2\\ & \delta & 2-\delta & & 2\\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 & b_j\backslash a_i\\ \hline\end{array}$$

<u>Bestimmung von δ :</u>

$\min\limits_{i,j} x_{ij} = 2 \qquad$ mit $\Delta\tilde{x}_{ij} = -\delta$

Neue x_{ij}-Tabelle :

$$x_{ij}:\quad \begin{array}{|cccc|c|}\hline 2 & 0 & 3 & 1 & 6\\ & 2 & & & 2\\ & 2 & & & 2\\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 & b_j\backslash a_i\\ \hline\end{array}$$

$$c_{ij}\ ,\ c'_{ij}:\quad \begin{array}{|cccc|c|}\hline \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{2} & \boxed{3} & 3\\ 3 & \boxed{1} & 5 & 3 & -1\\ 6 & \boxed{0} & 4 & 4 & -2\\ \hline -2 & 2 & -1 & 0 & v_j\backslash u_i\\ \hline\end{array}$$

Minimumtest ist erfüllt, d.h. Optimalität erreicht.

$$\Longrightarrow \text{Lösung} : x_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,\; c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D.h. $2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \; = \; 4 + 6 + 3 + 2 \; = \; 15$ GE

Kapitel 7

Spieltheorie

Gegeben sei eine Auszahlungsmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sowie zwei Spieler R,S
Spieler R wählt eine Zeile i
Spieler S wählt eine Spalte j
Annahme : Beide Spieler spielen nach einer zufälligen gemischten Strategie.

- R wählt in jeder Runde die Zeile i mit der Wahrscheinlichkeit x_i
  $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$, $0 \leq x_i \leq 1$ (vollständige Aufspaltung des Ereignisfeldes)
- S wählt in jeder Runde die Spalte j mit der Wahrscheinlichkeit y_j
  $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$, $0 \leq y_j \leq 1$ (vollständige Aufspaltung des Ereignisfeldes)

<u>Erwartungswert der Auszahlungen von S an R pro Spielrunde :</u>
(= mittlerer Gewinn von R pro Runde)

$$\sum_{i,j} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

<u>Ziel von R :</u>
Maximierung der Auszahlung durch geschickte Wahl seiner Stategie $x = (x_1, ..., x_m)^T$
<u>Ziel von S :</u>
Minimierung der Auszahlung durch geschickte Wahl seiner Stategie $y = (y_1, ..., y_n)^T$

Die Auszahlung hängt von den Strategien beider Spieler ab.

<u>R spielt konservativ :</u>
R nimmt an , dass der Spieler S die Strategie von R kennt, d.h. , wenn R x^0 spielt, wird S ein y wählen, so dass die Auszahlung $\sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i^0 y_j$ möglichst klein wird.
Wegen

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i^0 y_j \;= \sum_j y_j \sum_i a_{ij} x_i^0 \;\geq\; \underbrace{\sum_j y_j}_{=1} \min_j \sum_i a_{ij} x_i^0 = \min_j \sum_i a_{ij} x_i^0$$

folgt :

$$\min_j \sum_{i,j} a_{ij} x_i^0 y_j \;\geq\; \min_j \sum_i a_{ij} x_i^0 = \sum_i a_{ij_0} x_i^0 \qquad (*)$$

Die Auszahlung für $y_{ij_0} = 1$, $y_{ij_0} = 0$ ist $\sum_i a_{ij_0} x_i^0$, und wegen (*) ist dies das Minimum

$$\min_y \sum_{i,j} a_{ij} x_i^0 y_j \;=\; \sum_i x_i^0 a_{ij(x^0)}$$

Auf diesen Wert kann S die Auszahlung drücken, wenn R die Strategie x^0 spielt.

$\Rightarrow$ R muss seine Strategie x so wählen, dass dieses Minimum möglichst groß wird :

$$\min_j \sum_i x_i a_{ij} \;=\; \sum_i x_i a_{ij(x)} \;=\; \max$$

Der Spieler R wird dann folgende mittlere Auszahlung erreichen :

$$v_1 = \max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij}$$

Dieses maximale x : $\hat{x}^0$ ist die für R optimale Strategie.
R bekommt mit dieser Strategie ungeachtet der Spielweise von S eine mittlere Auszahlung v_1.
Weicht R von $\hat{x}^0$ ab, so kann S bei einer geeigneten Spielweise die Auszahlung unter v_1 drücken.

Bestimmung einer optimalen Strategie $\hat{x}^0$ für R :
Formulierung als lineares Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{x \geq 0\ ,\ \sum x_i = 1} \left(\min_{j=1,\dots,n} \sum_i x_i a_{ij} \right) \\ &= \max_{x \geq 0\ ,\ \sum x_i = 1} \left(\max_{L \leq \sum_i x_i a_{ij}\ ,\ j=1,\dots,n} L \right) \\ &= \max_{x \geq 0\ ,\ \sum x_i = 1\ ,\ L \leq \sum_i x_i a_{ij}\ ,\ j=1,\dots,n} L \end{aligned}$$

L erfüllt keine Vorzeichenbeschränkung :
Setze : $-L := x_{m+1} - x_{m+2}$ mit : $x_{m+1} \geq 0$, $x_{m+2} \geq 0$

Das Maximumproblem hat damit folgende Gestalt :

$$\begin{aligned} x_{m+1} - x_{m+2} &\to \min \qquad (*) \\ \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} + x_{m+1} - x_{m+2} &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i &\geq 1 \end{aligned}$$

$$(= LOP2)$$

Sind Optimallösungen vorhanden , so liefert $\hat{x}^0 = (\hat{x}_1^0, \dots, \hat{x}_m^0)$ die optimale Strategie für Spieler R und die mittlere Auszahlung beträgt $v_1 = -\hat{x}_{m+1}^0 + \hat{x}_{m+2}^0$

Bestimmung einer optimalen Strategie für S :

S verhält sich konservativ :
Er rechnet damit, dass seine Strategie y^0 dem Spieler R bekannt ist.
D.h. R wird vermutlich so spielen, dass die Auszahlung $\sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i y_j^0$ maximal wird.
Analog zu den vorangegangenen Betrachtungen gilt :

$$\max_x \sum_{i,j} x_i y_j^0 a_{ij} = \max_i \sum_j y_j^0 a_{ij}$$

$\Rightarrow$ S muss seine Strategie so wählen, dass dieser Maximalwert möglichst klein wird :

$$\max_i \sum_j a_{ij} y_j \to \min_{y \geq 0\ ,\ \sum y_j = 1}$$

Die mittlere Auszahlung für Spieler S beträgt

$$v_2 = \min_{y \geq 0\ ,\ \sum y_j = 1} \left(\max_i \sum_{j=1}^n y_j a_{ij} \right)$$

Wenn $\hat{y}^0$ eine für S optimale Strategie ist, so kann S die mittlere Auszahlung v_2 erwarten, ohne Rücksicht auf das Gegenspiel von R.
Weicht S von $\hat{y}^0$ a, so kann R bei einem geeigneten Gegenspiel eine größere Auszahlung als v_2 erreichen.
Zur Berechnung von $\hat{y}^0$ wird folgendes LOP aufgestellt :

$$\begin{aligned} v_2 &= \min_y \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n y_j a_{ij} \\ &= \min_y \min_{K \geq \sum_{j=1}^n y_j a_{ij}} K \\ &= \min_{y \geq 0} K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &mit \\ &\quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ &\quad \sum_{j=1}^n y_j a_{ij} \leq K \end{aligned}$$

Da K beliebiges Vorzeichen hat setzen wir : $-K := y_{n+1} - y_{n+2} \qquad y_{n+1}, y_{n+2} \geq 0$
$\Rightarrow$ Das Minimierungsproblem kann umformuliert werden :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_{n+2} &\to \max \qquad (**) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + y_{n+1} - y_{n+2} &\leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{j=1}^{n} y_j &\leq 1 \\ \sum_{j=1}^{n} -y_j &\leq -1 \\ y_j &\geq 0 \qquad j = 1, ..., n+2 \end{aligned}$$

$$(= LOP2)$$

In Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & -1 \\ & A^T & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ \hline 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \ldots & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y_1, \ldots, y_{n+2} \geq 0$$
$$y_{n+1} - y_{n+2} \to \max$$

Falls eine Optimallösung existiert, so ist mit $\hat{y}^0 = (\hat{y}_1^0, ..., \hat{y}_n^0)$ eine optimale Strategie für S gegeben.
Mit $v_2 = -\hat{y}_{n+1}^0 + \hat{y}_{n+2}^0$ erhält man die mittlere Auszahlung von S an R.

Bemerkungen

1. $(*)^D = (**)$

2. Da beide Probleme zulässige Lösungen besitzen, (jedes x mit $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ und jedes y mit $\sum_{j=1} y_j = 1$ ist zulässig, da man $x_{m+1}, x_{m+2}, y_{m+1}, y_{m+2}$ geeignet wählen kann) existiert das Minimum von (*) $(-L = -v_1)$ und das Maximum von (**) $(-K = -v_2)$ und beide sind gleich. (Folgerung aus der starken Dualität)

$$v_1 = v_2 =: \nu$$

- ν heißt Wert des Spiels
- $\hat{x}^0, \hat{y}^0$ heißen Lösungen des Matrixspiels

3. Wegen 1) und 2) gilt der Minimaxsatz (von Neumann)

$$\nu = \max_x(\min_y \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij})$$
$$= \min_y(\max_x \sum_{i=}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij})$$
$$mit \quad x \geq 0, y \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

4. Durch Angabe der beiden optimalen Strategien und durch den Wert des Spiels ist das Matrixspiel in folgendem Sinne gelöst :
   (a) Befolgt R die Strategie $\hat{x}^0$, so kann er bei jedem Gegenspiel von S mindestens die Auszahlung ν erwarten.
   (b) Befolgt R diese Strategie nicht, so kann S die Auszahlung evtl. unter ν drücken.
   (c) Selbst wenn R weiß, dass S konservativ spielt, also $\hat{y}^0$, so kann er trotz dieser Information die Auszahlung nicht größer als ν erreichen.
   (d) Bei diesem vollständigen Einblick ist es für beide Spieler am günstigsten, ihre optimalen Strategien zu wählen.

7.1 Faire Spiele

- Ein faires Spiel (kein Spieler wird a priori begünstigt), ist ein Spiel, dass den Wert $\nu = 0$ hat.
- Ein vollständig symmetrisches Spiel bzgl. R und S liegt vor, wenn A schiefsymmetrisch ist. ($A = -A^T$)

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 1 \\ & A & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad x_{m+1} - x_{m+2} \to \min$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & -1 \\ & A^T = -A & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{,+1} \\ y_{m+2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & -1 & 1 \\ & A & & \vdots & \vdots \\ & & & -1 & 1 \\ \hline -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{m+1} \\ y_{m+2} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad y_{m+1} - y_{m+2} \to \max$$

Beispiel 1 : Stein-Schere-Papier

	St	P	Sch
St	0	-1	1
P	1	0	-1
Sch	-1	1	0

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \text{ und} \quad x_4 - x_5 \to 0$$

$$\hat{x}^0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0) \text{ ist die einzige Lösung}$$

Beispiel 2 : Fussballwette Deutschland vs. Polen

Sieg D : 1.5 DP (Unentschieden) : 3.65 Sieg P : 7.0

	D	DP	P
D	0,5	-1	-1
DP	-1	2,65	-1
P	-1	-1	6

$$\begin{pmatrix} 0,5 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2,65 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \text{ und} \quad x_4 - x_5 \to 0$$

Das Wettbüro macht also folgende Annahmen :
$x_1 \approx 62\%$ für Sieg Deutschland
$x_2 \approx 25\%$ für Unentschieden
$x_3 \approx 13\%$ für Sieg Polen
Das Spiel ist nicht fair, da $\nu = -0,08$. (Bei einem Euro Einsatz verliert man ca. 8 Cent.)

Kapitel 8

Das Karmarkar-Verfahren

Gegeben sei ein lineares Optimierungsproblem P vom Typ LOP3 :

$$
\begin{aligned}
c^T x &\to \min \\
x &\in \mathbb{R}^n \\
\begin{pmatrix} A \\ e^T \end{pmatrix} x &= \begin{pmatrix} \vec{0} \\ n \end{pmatrix} \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

mit $e^T = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$

<u>Voraussetzungen :</u>
$rang(A) = m$
$A \cdot e = \vec{0}$ (zulässige Lösung)
$\min(P) = 0$

Sind diese Voraussetzungen gegeben, so ist P in "Karmarkar-Normalform".
Ein allgemeines lineares Optimierungsproblem kann in Karmarkar-Normalform überführt werden.

<u>Darstellung des Karmarkar-Verfahrens :</u>

- Gegeben sei das LOP (P) und die obigen Voraussetzungen seien erfüllt.
- Input : $\alpha \in (0, 1)$, $r = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$, $x^0 := e$
- Algorithmus :
  For $k = 0, 1, ...$ do :
  1. Berechne $c^T x^k$
     Falls $c^T x^k = 0$, so ist x^k eine Lösung von (P) $\Longrightarrow$ STOP
  2. Setze $D_k := diag(x_1^k, ..., x_n^k)$
     (Diagonalmatrix, welche die Komponenten von x^k in der Diagonalen enthält.
     Wegen $x_i^k \geq 0$ ist det $D_k > 0 \Rightarrow D_k^{-1}$ existiert.)
     Desweiteren setze $B_k := \begin{pmatrix} AD_k \\ e^T \end{pmatrix}$

3. Berechne :
   - $p^k := [I - B_k^T(B_kB_k^T)^{-1}B_k]D_kc$ $\qquad\qquad p^k \neq \vec{0}$
   - $y^{k+1} := e - \alpha \cdot r \cdot \frac{p^k}{\|p^k\|_2}$
   - $x^{k+1} := \frac{n}{\langle (x^k)^T, y^{k+1}\rangle}$

   Setze $x^k := x^{k+1}$ und gehe wieder zu 1.

Begründung des Karmarkar-Verfahrens :
Annahme, dass $x \in B$ mit $x > 0$ eine aktuelle Näherung sei,
welche **keine** Lösung ist (also $c^Tx > 0$).
Nun konstruiert man $D = diag(x_1, ..., x_n)$.

Mit $B^0 := \left\{z \in \mathbb{R}^n \ : \ e^Tz = n \ , \ z \geq 0\right\}$ ist das Ausgangsproblem gegeben durch
$c^Tz \to \min\limits_{z \in Kern(A) \cap B^0}$ mit $Kern(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = 0\}$

Definiert man die projektive Transformation $T : B^0 \to B^0$ durch

$$y = T(z) := \frac{n}{e^TD^{-1}z}D^{-1}z \qquad ,$$

so folgt $T(x) = e$, d.h. die aktuelle Näherung x wird in die Schwerpunkte von B^0 abgebildet.

Begründung :

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & & & \vec{0} \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ \vec{0} & & & x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & & & \vec{0} \\ & \frac{1}{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ \vec{0} & & & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}x = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & & & \vec{0} \\ & \frac{1}{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ \vec{0} & & & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e$$

$$\Longrightarrow T(x) = \frac{n}{e^TD^{-1}x}D^{-1}x = \frac{n}{e^Te}e = \frac{n}{n}e = e$$

Ferner ist T bijektiv (eineindeutig).

Die inverse Transformation $T^{-1} : B^0 \to B^0$ ist gegeben durch :

$$z = T^{-1}(y) := \frac{n}{x^Ty}Dy$$

Begründung :

$$T^{-1}(y) = \frac{n}{x^T\left(\frac{n}{\frac{z_1}{x_1}+...+\frac{z_n}{x_n}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{z_1}{x_1}\\ \vdots\\ \frac{z_n}{x_n}\end{pmatrix}\right)}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & & \vec{0}\\ & \ddots & \\ \vec{0} & & x_n\end{pmatrix}\left(\frac{n}{\frac{z_1}{x_1}+...+\frac{z_n}{x_n}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{z_1}{x_1}\\ \vdots\\ \frac{z_n}{x_n}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{n\cdot\frac{n}{\frac{z_1}{x_1}+...+\frac{z_n}{x_n}}}{\frac{n}{\frac{z_1}{x_1}+...+\frac{z_n}{x_n}}\underbrace{(z_1+z_2+...+z_n)}_{z\in B^0\,:\,e^Tz=n}}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

$$= \frac{n}{n}\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

$$= z$$

Schreibt man das Ausgangsproblem P in der transformierten Variable y (d.h. man ersetzt z durch $T^{-1}(y)$) , so erhält man das äquivalente **lineare Quotienten-Optimierungsproblem** :

$$(P) : Az = 0 \Rightarrow A\left(\frac{n}{x^Ty}Dy\right) = 0$$
$$\Rightarrow AD(y) = 0$$
$$(da\ D = D^T)$$

$$\Rightarrow$$
$$\frac{n(Dc)^Ty}{x^Ty} \longrightarrow \min_{y\in Kern(AD)\cap B^0}$$

Wegen der Voraussetzung $\min(P) = 0$ ist diese Aufgabe äquivalent zum transformierten Problem (P_T) :

$$(Dc)^Ty \longrightarrow \min_{y\in Kern(AD)\cap B^0}$$

also gilt :

$$x^*\ ist\ Loesung\ von\ (P) \iff y^* = T(x^*)\ ist\ Loesung\ von\ (P_T)$$

Die entscheidende Idee von Karmarkar ist :
(P_T) als Relaxation einer geschlossen lösbaren nichtlinear restringierten Aufgabe aufzufassen.
Die Grundlage hierfür ist :

Lemma 8.1 :

Sei : $B^0 = \{y \in \mathbb{R}^n\ :\ e^Ty = n\ ,\ y \geq 0\}$,
$K(e,\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n\ :\ e^Ty = n\ ,\ \|y-e\|_2 \leq \delta\}$,
Mit $r = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ und $R = \sqrt{n(n-1)}$, sowie $\alpha \in (0,1)$ gilt :
$K(e,r) \subset B^0 \subset K(e,R)$

und

$$K(e,\alpha r) \subset \{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ e^T y = n \ , \ y > 0 \}$$

Geometrisch :
$K(e,r)$ ist Inkugel und $K(e,R)$ ist Umkugel zu Elementen $y \geq 0$ in der Hyperebene $H := \{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ e^T y = n \}$.

- Wegen $K(e,\alpha r) \subset B^0$ ist das lineare Optimierungsproblem (P_T) eine Relaxation folgender Optimierungsaufgabe :

  $$(P_T^\alpha) : (Dc)^T y \longrightarrow \min_{y \in Kern(AD) \cap K(e,\alpha r)}$$

  Die Aufgaebe (P_T^α) besitzt, wie in Lemma 8.2 gezeigt wird, eine eindeutige, geschlossen angebbare Lösung y^+.

- Geometrische Motivation :
  Ersetzt man in (P_T^α) y durch $e - u$, so gilt :
  y^+ *ist Lsg von* $(P_T^\alpha) \iff u^+ := e - y^+$ *ist Lsg von*$(Dc)^T u \to \max_{u \in Kern(B) \cap B(0,\alpha r)}$,
  wobei :
  $B = \begin{pmatrix} AD \\ e^T \end{pmatrix}$, $B(0,\alpha r) = \{ u \in \mathbb{R}^n \ : \ \|u\|_2 \leq \alpha r \}$

Folgende Abbildung charakterisiert die Schritte des Karmarkar-Verfahrens :
Die Lösung u^+ des obigen Maximierungs-Problems erreicht man in zwei Schritten :

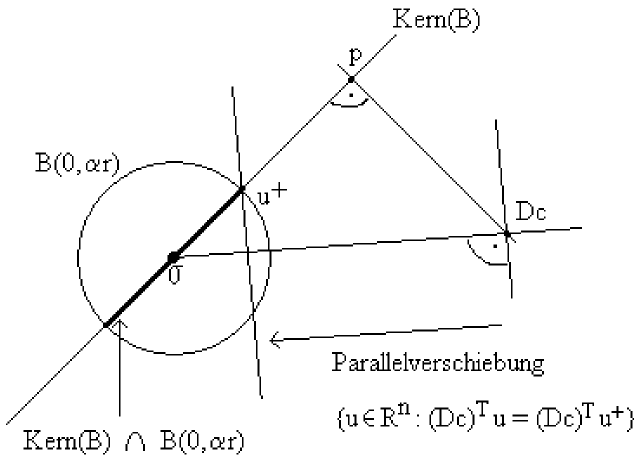


Abb. 8.1: Karmarkar-Verfahren

1. Man gewinnt zunächst den Vektor p , indem man Dc auf den $Kern(B)$ orthogonal projiziert.

2. Anschließend multipliziert man den Vektor p mit einem positiven Faktor, sodass der resultierende Vektor auf dem Rand von $B(0,\alpha r)$ liegt.
   D.h. man berechnet $u^+ = \frac{\alpha r}{\|p\|_2} p$.
   $\Rightarrow y^+$ ist optimale Lösung von (P_T^α). (Wegen $y^+ = e - u^+$)

3. Wegen $y^+ \in Kern(AD) \cap K(e,\alpha r)$ und Lemma 8.1 ($K(e,\alpha r) \subset B^0$)
   ist $y^+ \in Kern(AD) \cap B^0$. $\quad (y^+ > 0)$
   Durch Rücktransformation erhält man die aktuelle Näherung $x^+ = T^{-1}(y^+)$.
   x^+ ist zulässig für das Ausgangsproblem, d.h. $x^+ \in Kern(A) \cap B^0$, wobei $x^+ > 0$.

Übersicht des Karmarkar-Verfahrens :

$$\begin{array}{ccc} (P) : \boxed{x \in Kern(A) \cap B^0 \ , \ x > 0} & \stackrel{T}{\longrightarrow} & (P_T) : \boxed{y \in Kern(A) \cap B^0} \\ & & \downarrow \\ (P) : \boxed{x^+ \in Kern(A) \cap B^0 \ , \ x^+ > 0} & \stackrel{T^{-1}}{\longleftarrow} & (P_T^\alpha) : \boxed{y^+ \in Kern(AD) \cap K(e, \alpha r)} \end{array}$$

Das folgende Lemma sichert die Durchführbarkeit des Karmarkar-Verfahrens :

Lemma 8.2 :
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem (P) in Karmarkar-Normalform und die Voraussetzungen (V) seien erfüllt.
Sei $x \in B$ mit $x > 0$ eine aktuelle Näherung und $c^T x > 0$. (D.h. x keine Lösung von (P)).
Setzt man $D := diag(x_1, ..., x_n)$ und $B = \begin{pmatrix} AD \\ e^T \end{pmatrix}$, so gilt :

1. $rang(B) = m + 1$ und daher BB^T nicht singulär.
2. Es gilt $p = [I - B^T(BB^T)^{-1}B]Dc \neq \vec{0}$
3. $y^+ := e - u^+ = e - \frac{\alpha r}{\|p\|_2} p$ ist die eindeutige Lösung von :
   $\boxed{\text{Minimiere } (Dc)^T y \text{ unter der Nebenbedingung } y \in Kern(AD) \cap K(e, \alpha r)}$,
   wobei $\alpha \in (0,1)$, $r = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ und $K(e, \alpha r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ e^T y = n \ , \ \|y - e\|_2 \leq \alpha r \right\}$
4. Es gilt : $(Dc)^T y^+ \leq (\frac{1-\alpha}{n-1}) c^T x$

Bemerkung :
Die Hauptarbeit in jedem Schritt des Karmarkar-Verfahrens besteht in der Berechnung des Vektors p.
Da $p \in Kern(B)$ ist, und $p - Dc$ senkrecht auf $Kern(B)$ steht, ist p die orthogonale Projektion von Dc auf $Kern(B)$.

Lemma 8.3 : Zurückführung eines LOP auf Karmarkar-Normalform
Gegeben seien $A_0 \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $b_0 \in \mathbb{R}^k$, $c_0 \in \mathbb{R}^l$, sowie das lineare Programm (P_0) :
Minimiere $c_0^T u$ auf $M_0 := \left\{ u \in \mathbb{R}^l \ : \ u \geq 0 \ , \ A_0 u \geq b_0 \right\}$.
Ist die Menge der optimalen Lösungen von (P_0) nichtleer und beschränkt, so gilt :
$\left\{ u \in \mathbb{R}^l \ : \ u \geq 0 \ , \ A_0 u \geq 0 \ , \ c_0^T u \leq 0 \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}$.

Definition 8.1 :
Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $e = (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$.
Die Optimierungsaufgabe (P) :
Minimiere $c^T x$ auf $B := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ x \geq 0 \ , \ \begin{pmatrix} A \\ e^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ n \end{pmatrix} \right\}$, $(Ax = \vec{0} \ , \ e^T e = n)$
heißt lineares Programm in Karmarkar-Normalform.

Das Karmarkar-Verfahren ist auf (P) anwendbar, wenn folgende Voraussetzungen (V) erfüllt sind :
- $rang(A) = m$
- $Ae = \vec{0}$

- $\min(P) = 0$.

Sind diese erfüllt, so gilt :
- $e \in B$
- $x \in B$ ist optimal für $B \Leftrightarrow c^T x = 0$

<u>Frage :</u>
Kann die Lösung von (P_0) auf die Lösung eines linearen Programms in Karmarkar-Normalform zurückgeführt werden, welches die Voraussetzungen (V) erfüllt ?

<u>Satz 8.4 :</u>

Gegeben seien $A_0 \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $b_0 \in \mathbb{R}^k$, $c_0 \in \mathbb{R}^l$, das lineare Programm (P_0) :

Minimiere $c_0^T u$ auf $M_0 := \{u \in \mathbb{R}^l \ : \ u \geq 0 \ , \ A_0 u \geq b_0\}$,

sowie das hierzu duale Programm (D_0) :

Maximiere $b_0^T v$ auf $N_0 := \{v \in \mathbb{R}^k \ : \ v \geq 0 \ , \ A_0^T v \leq c_0\}$.

Man setze $m := k + l + 1$, $n := 2m$ und bilde mit

$$B := \begin{pmatrix} A_0 & -I & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & A_0^T & I \\ c_0^T & \vec{0}^T & -b_0^T & \vec{0}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n-2)} \ ,$$

$$d := \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \ , \ \bar{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-2} \ , \ c := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

das lineare Programm (P_k) :

$$\text{Minimiere } c^T x \text{ auf } B_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ x \geq 0 \ , \ \begin{pmatrix} B & -d & d - B\bar{e} \\ \bar{e}^T & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ n \end{pmatrix} \right\}.$$

Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt :

V1 : $b_0 \neq \vec{0}$ oder $c_0 \neq \vec{0}$

V2 : Die Menge der optimalen Lösungen von (P_0) sei nichtleer und beschränkt.

V3 : Es existiert ein $u_0 \in \mathbb{R}^l$ mit $u_0 \geq 0$, $A_0 u_0 > b_0$.

Dann gilt :

1.) (P_k) ist im folgenden Sinn zu (P_0) und (D_0) äquivalent :

1.1) Ist $u^* \in M_0$ eine optimale Lösung von (P_0) und ist $v^* \in N_0$ eine optimale Lösung von (D_0) ,

so hat $w^* := \begin{pmatrix} u^* \\ A_0 u^* - b_0 \\ v^* \\ c_0 - A_0^T v^* \end{pmatrix}$ die folgenden Eigenschaften :

- $w^* \geq 0$, $Bw^* = d$
- $x^* := \frac{n}{\bar{e}^T w^* + 1} \begin{pmatrix} w^* \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist eine optimale Lösung

von (P_k) mit $\min(P_k) = 0$

1.2) Ist $x^* := \begin{pmatrix} p^* \\ \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \in B_k$ mit $p^* \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\alpha^*, \beta^* \in \mathbb{R}$

eine optimale Lösung von (P_k) , so hat sie folgende Eigenschaften :
- $\beta^* = 0$, $p^* \geq 0$, $\alpha^* > 0$
- Für $w^* := \frac{1}{\alpha^*} p^*$ gilt : $w^* \geq 0$, $Bw^* = d$
- Ist $w^* = \begin{pmatrix} u^* \\ y^* \\ v^* \\ z^* \end{pmatrix}$ mit $u^*, z^* \in \mathbb{R}^l$, $y^*, v^* \in \mathbb{R}^k$, so ist u^* eine

optimale Lösung von (P_0) und v^* eine optimale Lösung von (D_0).

2.) (P_k) ist ein lineares Programm in der Karmarkar-Normalform und erfüllt die Voraussetzungen (V).

Antwort auf die obige Frage :
Erfüllt (P_0) die Voraussetzungen V1-V3, so kann nach Satz 8.4 die Lösung von (P_0) auf die Lösung des linearen Programms (P_k) in Karmarkar-Normalform zurückgeführt werden.

Satz 8.5 : Konvergenzsatz
Sei $q(\alpha, n) := \frac{\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)^n}{(1-\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)^{n-1}}$, dann gelten folgende Aussagen :

1. Jede vom Karmarkar-Verfahren erzeugte Näherung x^k , $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, genügt der Ungleichung $c^T x^k \leq q(\alpha, n)^{\frac{k}{n}} \cdot e^T x^0$.

2. Ist $q(\alpha, n) < 1$ und bricht das Karmarkar-Verfahren nicht nach endlich vielen Schritten mit einer Lösung ab, so erzeugt es eine Folge (x^k) von Punkten aus X mit $\lim\limits_{k\to\infty} c^T x^k = 0$, und jeder Häufungspunkt dieser Folge ist eine Lösung des Problems. (X =Menge aller zulässigen Lösungen)

Kapitel 9

Mehrkriterielle lineare Optimierung

Zielfunktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von sich teils widersprechenden Zielen.