**Übung Lineare Optimierung SS 2006 Blatt 8**

1. Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$Ax \geq b, \;\; x \geq 0, \;\; c^T x \to \min,$$

wobei wir annehmen, dass es ein zulässiges Element gibt. Beweisen Sie die folgende Aussage mit Hilfe der Dualitätstheorie.

Wenn die $i$-te Spalte von $A$ aus nichtnegativen Zahlen besteht und die $i$-te Komponente von $c$ negativ ist, dann existiert kein endliches Minimum.

2. Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min & & & \\ \text{bei} & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 & \geq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 & \geq & 3 \\ & x_i & \geq & 0, \;\; i = 1, ..., 5. \end{array}$$

Geben Sie das duale Problem zu dieser Aufgabe an! Lösen Sie das duale Problem grafisch (die genaue Lösung kann rechnerisch ermittelt werden, wenn die aktiven Restriktionen bekannt sind)! Bestimmen Sie mit Hilfe der Lösung der dualen Aufgabe die Lösung (damit ist nicht der Optimalwert gemeint) der Ausgangsaufgabe!

3. Mit Hilfe von Dualitätsaussagen bestimme man den Optimalwert der linearen Optimierungsaufgabe:

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \to \min \qquad \text{bei} \qquad \sum_{j=1}^{i} x_j \geq i, \;\; x_i \geq 0, \;\; i = 1, ..., n.$$

4. Gegeben ist das folgende lineare (primale) Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcl} 4x_1 + 14x_2 + 8x_3 \to \max \qquad \text{bei} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq & 10 \\ & x_i & \geq & 0, \;\; i = 1, ..., 3. \end{array}$$

Geben Sie das zugehörige duale Optimierungsproblem an! Zeigen Sie mit Hilfe des dualen Problems, dass die Zielfunktionswerte von zulässigen Lösungen des primalen Problems nicht größer als 50 sein können. (Das duale Problem muss dabei nicht gelöst werden.)