Aufgabe 2.1

??

Aufgabe 2.2

Das Schachbrett als 8×8 Matrix auffassen.
Die Matrixelemente sind die Variablen und werden mit $x_{i,j}$ bezeichnet.
Ein $x_{i,j}$ bekommt den Wert 1, wenn sich auf dem entsprechenden Schachbrett-Feld eine Dame befindet. Ansonsten ist $x_{i,j} = 0$.
Damit lautet das Optimierungsproblem :

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_{i,j} \rightarrow \max$$

Die Restriktionen sind durch die Forderung gegeben, dass sich keine zwei Damen schlagen dürfen.
D.h. in einer Zeile darf maximal eine Dame stehen :

$$\sum_{j=1}^{8} x_{i,j} \leq 1 \quad , i \in \{1, ..., 8\}$$

In einer Spalte darf maximal eine Dame stehen :

$$\sum_{i=1}^{8} x_{i,j} \leq 1 \quad , j \in \{1, ..., 8\}$$

Und in den Diagonalen darf ebenfalls jeweils maximal eine Dame stehen :

$$\sum_{i=0}^{8-j} x_{i+j\ ,\ i+1} \leq 1 \qquad , j \in \{1, ..., 8\}$$

$$\sum_{i=0}^{8-j} x_{i+j\ ,\ 8-i} \leq 1 \qquad , j \in \{1, ..., 8\}$$

$$\sum_{i=0}^{8-j} x_{i+1\ ,\ i+j} \leq 1 \qquad , j \in \{1, ..., 8\}$$

$$\sum_{i=0}^{8-j} x_{i+1\ ,\ j-i} \leq 1 \qquad , j \in \{1, ..., 8\}$$

Die Ganzzahligkeit der Lösung muss separat gefordert werden , da sonst $x_{i,j} = \frac{1}{8} \quad \forall i, j$ eine optimale Lösung (d.h. $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} x_{i,j} = 8$) wäre.

Aufgabe 2.3

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 3$

$\Rightarrow\ x_3 = x_1 + 3x_2 - 3$

Restriktion :

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2(x_1 + 3x_2 - 3) &\leq 8 \\ -2x_1 - 4x_2 + 6 &\leq 8 \\ -2x_1 - 4x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq -1 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Für $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq -\frac{1}{2}$

Für $x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq -1$

Zielfunktion :

$\lambda x_1 - x_2 \rightarrow \max$

$\Rightarrow -\lambda x_1 + x_2 \rightarrow \min$

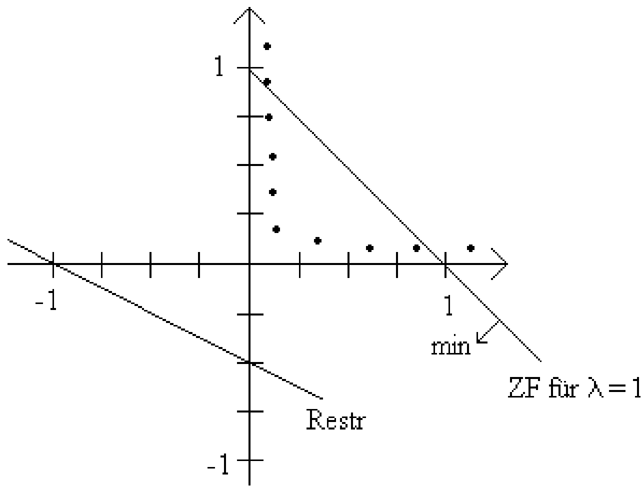

Abb. 1: graphische Lösung

$\Rightarrow$ Für $\lambda \geq 0$ existiert keine nichttriviale Lösung.

Aufgabe 2.4.a)

LOP1 :

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 &\to \min \\ &\textit{und} \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 3 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq -3 \\ 2x_2 - 2x_3 &\leq 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

LOP2 :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 3 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq -3 \\ 2x_2 - 2x_3 &\leq 8 \\ -x_1, -x_2, -x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = (3, -3, 8, 0, 0, 0)^T$$

LOP3 :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_2 - 2x_3 + y &= 8 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = (3, 8)^T$$

Aufgabe 2.4.b)

LOP1 :

$$
\begin{aligned}
-\lambda x_1 + x_2 &\to \min \\
&\textit{und} \\
x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 3 \\
-x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq -3 \\
2x_2 - 2x_3 &\leq 8
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

LOP2 :

$$
x_1 = y_1 - z_1 \quad , \quad x_2 = y_2 - z_2 \quad , \quad x_3 = y_3 - z_3
$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2) &\to \min \\
&\textit{und} \\
(y_1 - z_1) + 3(y_2 - z_2) - (y_3 - z_3) &\leq 3 \\
-(y_1 - z_1) - 3(y_2 - z_2) + (y_3 - z_3) &\leq -3 \\
2(y_2 - z_2) - 2(y_3 - z_3) &\leq 8 \\
y_i, z_j &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad c = (-\lambda, \lambda, 1, -1, 0, 0)^T
$$

$$
x = (y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3)^T \quad , \quad b = (3, -3, 8)^T
$$

LOP3 :

$$
\begin{aligned}
-\lambda(y_1 - y_1) + (y_2 - z_2) &\to \min \\
&\textit{und} \\
(y_1 - z_1) + 3(y_2 - z_2) - (y_3 - z_3) &= 3 \\
2(y_1 - z_1) - 2(y_2 - z_2) + s &= 8 \\
y_i, z_j, s &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad c = (-\lambda, \lambda, 1, -1, 0, 0)^T
$$

$$
x = (y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, s)^T \quad , \quad b = (3, 8, 0)^T
$$

Aufgabe 2.4.c)

LOP1 :

$$\begin{aligned} -d_1x_1 - d_2x_2 - d_3x_3 - d_4x_4 &\to \min \\ e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_4x_4 &\leq f_1 \\ -e_1x_1 - e_2x_2 - e_3x_3 - e_4x_4 &\leq -f_1 \\ -e_5x_1 - e_6x_2 - e_7x_3 - e_8x_4 &\leq -f_2 \\ x_4 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & -e_4 \\ -e_5 & -e_6 & -e_7 & -e_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; , \; c = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \\ -d_4 \end{pmatrix} \; , \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \; , \; b = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LOP2 :

$$\begin{aligned} -d_1(y_1 - z_1) - d_2(y_2 - z_2) - d_3(y_3 - z_3) - d_4(y_4 - z_4) &\to \min \\ e_1(y_1 - z_1) + e_2(y_2 - z_2) + e_3(y_3 - z_3) + e_4(y_4 - z_4) &\leq f_1 \\ -e_1(y_1 - z_1) - e_2(y_2 - z_2) - e_3(y_3 - z_3) - e_4(y_4 - z_4) &\leq -f_1 \\ -e_5(y_1 - z_1) - e_6(y_2 - z_2) - e_7(y_3 - z_3) - e_8(y_4 - z_4) &\leq -f_2 \\ y_i, z_j &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & -e_4 \\ -e_5 & -e_6 & -e_7 & -e_8 \end{pmatrix} \; , \; c = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \\ -d_4 \end{pmatrix} \; , \; x = (y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, y_4, z_4)^T \; , \; b = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix}$$

LOP3 :

$$\begin{aligned} -d_1(y_1 - z_1) - d_2(y_2 - z_2) - d_3(y_3 - z_3) - d_4(y_4 - z_4) &\to \min \\ e_1(y_1 - z_1) + e_2(y_2 - z_2) + e_3(y_3 - z_3) + e_4(y_4 - z_4) &= f_1 \\ -e_5(y_1 - z_1) - e_6(y_2 - z_2) - e_7(y_3 - z_3) - e_8(y_4 - z_4) + s &= -f_2 \\ y_i, z_j, s &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ -e_5 & -e_6 & -e_7 & -e_8 & 1 \end{pmatrix} \; , \; c = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ -d_3 \\ -d_4 \end{pmatrix} \; , \; x = (y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, y_4, z_4, s)^T \; , \; b = \begin{pmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix}$$