Aufgabe 1.1

Schichtbeginn (Uhrzeit)	0	4	6	8	12	14	16	20
zug. Anz. von Mitarbeitern	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Einsatz bis ... Uhr	8	12	14	16	20	22	24	4

Zielfunktion : $Q = x_1 + x_2 + ... + x_8 \longrightarrow Min$

Restriktionen : $x_1, ..., x_8 \geq 0 \quad , \quad x_i \in \mathbb{Z}$

Uhrzeit

0-1 $\quad 5 \leq x_8 + x_1$

1-2 $\quad 4 \leq x_8 + x_1$

2-3 $\quad 3 \leq x_8 + x_1$

3-4 $\quad 3 \leq x_8 + x_1 \quad \Rightarrow 5 \leq x_1 + x_8$

4-5 $\quad 4 \leq x_1 + x_2$

5-6 $\quad 12 \leq x_1 + x_2 \quad \Rightarrow 12 \leq x_1 + x_2$

6-7 $\quad 12 \leq x_1 + x_2 + x_3$

7-8 $\quad 12 \leq x_1 + x_2 + x_3 \quad \Rightarrow 12 \leq x_1 + x_2 + x_3$

8-9 $\quad 8 \leq x_2 + x_3 + x_4$

9-10 $\quad 8 \leq x_2 + x_3 + x_4$

10-11 $\quad 7 \leq x_2 + x_3 + x_4$

11-12 $\quad 7 \leq x_2 + x_3 + x_4 \quad \Rightarrow 8 \leq x_2 + x_3 + x_4$

12-13 $\quad 7 \leq x_3 + x_4 + x_5$

13-14 $\quad 7 \leq x_3 + x_4 + x_5 \quad \Rightarrow 7 \leq x_3 + x_4 + x_5$

14-15 $\quad 7 \leq x_4 + x_5 + x_6$

15-16 $\quad 10 \leq x_4 + x_5 + x_6 \quad \Rightarrow 10 \leq x_4 + x_5 + x_6$

16-17 $\quad 10 \leq x_5 + x_6 + x_7$

17-18 $\quad 13 \leq x_5 + x_6 + x_7$

18-19 $\quad 13 \leq x_5 + x_6 + x_7$

19-20 $\quad 13 \leq x_5 + x_6 + x_7 \quad \Rightarrow 13 \leq x_5 + x_6 + x_7$

20-21 $\quad 8 \leq x_6 + x_7 + x_8$

21-22 $\quad 8 \leq x_6 + x_7 + x_8 \quad \Rightarrow 8 \leq x_6 + x_7 + x_8$

22-23 $\quad 8 \leq x_7 + x_8$

23-0 $\quad 8 \leq x_7 + x_8 \quad \Rightarrow 8 \leq x_7 + x_8$

zulässiger Einsatzplan :

$x_1 = 1$, $x_2 = 11$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 7$, $x_6 = 3$, $x_7 = 4$, $x_8 = 4$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 30 \ \ Mitarbeiter$$

Aufgabe 1.2

Sei x_{igj} die Anzahl der Schüler aus Wohngebiet i , Klassenstufe g und Schule j , sowie d_{ij} die zugehörige Entfernung.
Desweiteren seien c_{jg} die maximal aufzunehmenden Schüler der Klassenstufe g in der Schule j un s_{ig} die Anzahl der Schüler aus Klassenstufe g im Wohngebiet. i

$$\Rightarrow \ Zielfunktion: \quad \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} d_{ij} \sum_{g=1}^{G} x_{igj} \ \longrightarrow \ Min$$

Restriktionen :

$$\sum_{j=1}^{J} x_{igj} = s_{ig} \quad \forall g, i$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{igj} \leq c_{jg} \quad \forall g, j$$

$$x_{igj} \geq 0 \ \ und \ ganzzahlig \ \ \forall g, i, j$$

Aufgabe 1.3

Lösung : Umstellen von $x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$ nach x_1 : $x_1 = 10 - x_2 - 2x_3$, und in die andere(n) Restriktionen , sowie in die Zielfunktion einsetzen :

$$7(10 - x_2 - 2x3) + 4x_2 + 16x_3 \leq 76$$
$$-3x_2 + 2x_3 \leq 6 \qquad (1)$$

$$0 \leq 10 - x_2 - 2x_3 \leq 6 \qquad (2)$$

$$3(10 - x_2 - 2x3) + 5x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$
$$30 + 2x_2 - 4x_3 \rightarrow \max \qquad (3)$$

Für die (Begrenzungs-)Hyperebene aus (1) folgt nun : $-3x_2 + 2x_3 = 6$
$\Rightarrow \ x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 3$ und $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$ (1')

Für die 2 (Begrenzungs-)Hyperebenen aus (2) folgt : $10 \geq x_2 + 2x_3$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 5$ und $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$ (2')
sowie $4 \leq x_2 + 2x_3$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$ und $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$ (2")

Aus der Zielfunktion folgt : $4x_3 = 2x_2 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2}x_2$

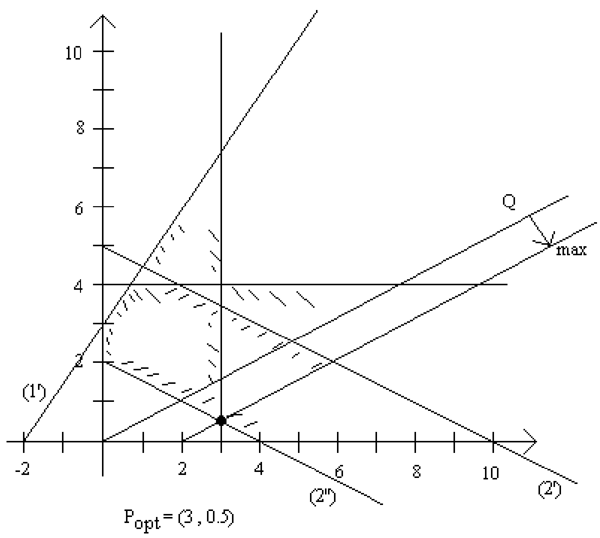

Abb. 1: graphische Lösung

Mit $x_2 = 3$ und $x_3 = 0.5$ folgt : $x_1 = 10 - x_2 - 2x_3 = 6$
$\Rightarrow \ P_{opt} = (6, 3, 0.5)$
$\Rightarrow \ Q_{max} = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0.5 = 18 + 15 + 1 = 34$