Testklausur - Georg Kuschk

Aufgabe 1 :

Variablen : t_1, t_2, t_3 : Laufzeiten der Prozesse

Restriktionen :

$9t_1 + 6t_2 + 4t_3 \leq 200$

$5t_1 + 8t_2 + 11t_3 \leq 400$

$50t_1 + 7t_2 + 100t_3 \leq 1850$

$t_i \geq 0$

Zielfunktion :

Chemikalie 1 : $9t_1 + 7t_2 + 10t_3$

Chemikalie 2 : $6t_1 + 10t_2 + 6t_3$ im Verhältniss 5/2

$\Rightarrow$

$\frac{9t_1 + 7t_2 + 10t_3}{6t_1 + 10t_2 + 6t_3} \leq \frac{5}{2}$, d.h. $9t_1 + 7t_2 + 10t_3 \leq \frac{5}{2} 6t_1 + 10t_2 + 6t_3$

$\Rightarrow$

$Q: \quad 9t_1 + 7t_2 + 10t_3 \rightarrow \max$ (Lösung aus Übung)

TODO : Warum nicht mittels Verhältnisgleichung die Menge der Chemikalien maximieren ? :

$$\frac{5}{7}(9t_1 + 7t_2 + 10t_3) + \frac{2}{7}(6t_1 + 10t_2 + 6t_3) = \frac{57}{7}t_1 + \frac{55}{7}t_2 + \frac{62}{7}t_3$$

$\Rightarrow$

$Q: \quad \frac{57}{7}t_1 + \frac{55}{7}t_2 + \frac{62}{7}t_3 \rightarrow \max$

Aufgabe 2.a & b) :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \quad \geq 1$$
$$2x_1 + 2x_3 \quad \geq 1$$
$$x_i \geq 0$$

Problem, da "$\geq$" statt "$\leq$".
Mit -1 durchmultiplizieren bringt nichts, da die rechte Seite dann unzulässig wird.
$\Rightarrow$
Nichtnegative Schlupfvariablen $s_i \geq 0$ subtrahieren und künstliche Variablen einführen, um kanonische Form herzustellen:

$$x_1 + x_2 + x_3 - s_1 + k_1 \quad = 1$$
$$2x_1 + 2x_3 - s_2 + k_2 \quad = 1$$

Die Hilfzielfunktion $k_1 + k_2 \rightarrow \min$ versucht die künstlichen Variablen zu elimineren.
(= Umstellen von (*) nach k_1, k_2, und addieren dieser Gleichungen.)

$$k_1 \quad = -x_1 - x_2 - x_3 + s_1 - 1$$
$$k_2 \quad = -2x_1 - 2x_3 + s_2 - 1$$

$\Rightarrow$

$$k_1 + k_2 \rightarrow \min$$
$$-3x_1 - x_2 - 3x_3 + s_1 + s_2 - 2 \rightarrow \min$$

(*)

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	b
k_1	1	1	1	-1	0	1
k_2	**2**	0	2	0	-1	1
HZF	-3	-1	-3	1	1	-2
-ZF	2	1	1	0	0	0

	k_2	x_2	x_3	s_1	s_2	b
k_1	$-\frac{1}{2}$	**1**	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
HZF	$\frac{3}{2}$	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
-ZF	-1	1	-1	0	1	-1

	k_2	k_1	x_3	s_1	s_2	b
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
HZF	1	1	0	0	0	0
-ZF	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ HZF minimal , Streichen der künstlichen Variablen

	x_3	s_1	s_2	b
x_2	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-ZF	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Und mit Simplex-Algorithmus lösen :

	x_3	s_1	s_2	b
x_2	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	<u>***1***</u>	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-ZF	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

	x_1	s_1	s_2	b
x_2	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-ZF	1	1	0	-1

Hier ist bereits Optimalität erreicht.
Wegen der 0 in der ZF-Zeile ist die Lösung nicht eindeutig.
Der Simplex-Algorithmus liefert neue Ecken, der Zielfunktionswert ändert sich jedoch nicht.
Ein weiterer Schritt im Simplex-Algorithmus liefert eine andere Lösung :

	x_1	s_1	s_2	b
x_2	0	-1	$\frac{1}{2}$ (Piv)	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-ZF	1	1	0	-1

	x_1	s_1	x_2	b
s_2	0	-2	**2**	1
x_3	1	-1	1	1
-ZF	1	1	0	-1

usw. (springt beim nächsten Schritt wieder zum vorigen Tableau zurück)

$\Rightarrow$ Eine optimale Lösung ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, die andere ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(mit $Q = 1$)

Ausserden nicht eindeutig, da beim Eliminieren der künstlichen Variablen (siehe Tableau (*)) 3 Auswahlmöglichkeiten des Pivotelementes bestanden.

Aufgabe 2.c) :

Lösen der Aufgabe mit dualem Simplex-Algorithmus :

$2x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$x_1 + x_2 + x_3 \quad \geq 1$

$2x_1 + 2x_3 \quad \geq 1 \quad , \; x_i \geq 0$

$\Rightarrow$

$2x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$-x_1 - x_2 - x_3 \quad \leq -1$

$-2x_1 - 2x_3 \quad \leq -1 \quad , \; x_i \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	b
s_1	-1	-1	-1	-1
s_2	-2	0	***-2***	-1
-Q	2	1	1	0

(Die unterste Zeile 2 1 1 bedeutet dual zulässig. Würden dort negative Werte vorkommen, so müsste man den mehrstufigen Algorithmus verwenden.)

TODO : Wählt man als Pivotzeile die 1. statt der 2. Zeile (kleinste Kostenregel, beide -1), so entsteht im Folgeschritt ein unzulässiges Tableau.

	x_1	x_2	s_2	b
s_1	0	***-1***	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-Q	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

	x_1	s_1	s_2	b
x_2	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-Q	1	1	0	-1

$\Rightarrow$ Optimalität erreicht, Lösung ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ (mit $Q = 1$).

Aufgabe 3 :

primales Problem : $Q : c^T x \to \min$

$Ax = b$

$x \geq 0$

duales Problem : $G : b^T u \to \max$

$A^T u \leq c$

Beweis, dass schwache Dualität gilt :

Zu zeigen : $G(u) \leq Q(x)$

$$
\begin{aligned}
G(u) &= b^T u \\
&= u^T b && \text{(da Skalar)} \\
&= u^T Ax && (Ax = b) \\
&\leq c^T x && \text{(aus } A^T u \leq c \text{ folgt } u^T A \leq c^T \text{)} \\
&= Q(x)
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Aufgabe 4 :

$$10x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \quad \leq 7 \qquad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \quad \leq 10 \qquad (2)$$

$$x_1 - x_2 \quad \leq 12 \qquad (3) \qquad\qquad x_1 \geq 0\,,\ x_2 \text{ frei}$$

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist eine Optimallösung der dualen Aufgabe, d.h. ,

wegen $3 \neq 0$ muss (1) mit „=“ erfüllt sein
wegen $0 = 0$ kann (2) mit „≤“ erfüllt sein
wegen $4 \neq 0$ muss (3) mit „=“ erfüllt sein
$\Rightarrow$ LGS aus (1) & 3 :

$$2x_1 + x_2 = 7 \qquad \Rightarrow x_2 = 7 - 2x_1$$

$$x_1 - x_2 = 12 \qquad \Rightarrow x_1 - 7 + 2x_1 = 12$$

$$\Rightarrow 3x_1 = 19$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{21}{3} - \frac{38}{3} = -\frac{17}{3}$$

Andere Ansätze zu 4.) :

x_2 ist frei, und wird somit durch zwei vorzeichenbeschränkte Variablen ersetzt : $\quad x_2 = x'_2 - x''_2$, $\quad x'_2, x''_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

$$10x_1 - x'_2 + x''_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x'_2 - x''_2 \quad \leq 7$$

$$x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 \quad \leq 10$$

$$x_1 - x'_2 + x''_2 \quad \leq 12 \qquad\qquad x_1, x'_2, x''_2 \geq 0$$

Duale Aufgabe :

$$2u_1 + u_2 + u_3 \quad \geq 10 \qquad x_1$$

$$u_1 + 2u_2 - u_3 \quad \geq -1 \qquad x'_2$$

$$-u_1 - 2u_2 + u_3 \quad \geq 1 \qquad x''_2$$

Einsetzen der dualen Optimallösung liefert

$$6 + 4 \quad = 10$$

$$3 - 4 \quad = -1$$

$$-3 + 4 \quad = 1$$

Jede dieser Gleichung ist mit „=“ erfüllt, also ist der Schlupf = 0.
$\Rightarrow$ Für jede Gleichung ist also die zugehörige primale Variable $\neq 0$.
(Diese Information hilft hier allerdings nicht weiter.)