

Testklausur Lineare Optimierung SS 2006

erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsmitschrift, Übungsserien

nicht erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, Notebooks

1. Eine chemische Fabrik erzeugt aus zwei Rohstoffen und einem Brennstoff zwei Chemikalien. Dies kann mittels dreier Reaktions-Prozesse geschehen, die einen unterschiedlichen Verbrauch der Substanzen und verschiedene Wirkungsgrade haben.

	Rohstoff 1	Rohstoff 2	Brennstoff	Chemikalie 1	Chemikalie 2
Prozess 1	9	5	50	9	6
Prozess 2	6	8	75	7	10
Prozess 3	4	11	100	10	6

(Angaben in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit)

Von Rohstoff 1 sind 200, von Rohstoff 2 sind 400, und vom Brennstoff 1850 Mengeneinheiten vorhanden. Der Auftrag an die Fabrik lautet, eine Misch-Substanz der beiden Chemikalien 1 und 2 im Mengenverhältnis 5:2 herzustellen. Wie lange sollen die verschiedenen Prozesse laufen, um möglichst viel dieser Mischung herzustellen? Formulieren Sie diese Frage als lineares Optimierungsproblem! (4 Punkte)

2. Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min \quad & \text{bei} \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

- a) Lösen Sie das Problem mit dem zweistufigen Simplexalgorithmus! (4 Punkte)
- b) Zeigen Sie, dass die Lösung nicht eindeutig ist, indem Sie eine weitere Lösung berechnen! (2 Punkte)
- c) Lösen Sie das Problem nochmals mit dem dualen Simplexalgorithmus! (3 Punkte)

Geben Sie jeweils die Tableaus an und erklären Sie kurz die Vorgehensweise!

3. Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$c^T x \rightarrow \min, \quad \text{bei} \quad Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Stellen Sie das duale Problem auf und beweisen Sie, dass schwache Dualität gilt! Markieren Sie die Stelle, an der die Restriktion $x \geq 0$ im Beweis verwendet wird! (3 Punkte)

4. Gegeben ist die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \rightarrow \max \quad & \text{bei} \quad 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ frei.} \end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass $u = (3, 0, 4)^T$ eine Optimallösung der dualen Aufgabe ist. Bestimmen Sie daraus eine Optimallösung der gegebenen Aufgabe! (4 Punkte)