Numerik 2 – Übung09 – Georg Kuschk

1.)

z.B. mit Lagrange-Polynomen

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \left(\prod_{i=1}^{2} \frac{t - t_0}{t_i - t_0} \right) dt$$

$$t_0 = -\frac{2}{3} \quad , \quad t_1 = 0 \quad , \quad t_2 = \frac{2}{3}$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \cdot \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) dt$$

$$w_2 = \ldots$$

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right) dt = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \cdot \int_a^b t^i dt \right)$$

$$t^0 : \qquad w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1 dt = 2$$

$$t^1 : \qquad w_0 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right) = \int_{-1}^{1} t \; dt = 0$$

$$t^2 : \qquad w_0 \cdot \left(\frac{4}{9} \right) + w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot \left(\frac{4}{9} \right) = \int_{-1}^{1} t^2 \; dt = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow$$

$$2 w_0 \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow w_2 = w_0 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow w_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt \approx \frac{3}{4} \cdot f\left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot f(0) = \frac{3}{4} \cdot f\left(\frac{2}{3} \right)$$

weitere Grade :

$$t^3 : \qquad w_0 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^3 + w_2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 = 0 \qquad \text{(korrekt)}$$

$$t^4 : \qquad \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^4 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4 = \frac{8}{27} \quad \neq \frac{2}{5} \qquad \text{(falsch)}$$

$\Rightarrow$ max. Grad = 3

Benutzen der Formel :

$$\int_{-1}^{1}(\sin(pt))^2 dt \approx \frac{3}{4}\left(\sin\left(-\frac{2}{3}p\right)\right)^2 + 0 + \frac{3}{4}\left(\sin\left(\frac{2}{3}p\right)\right)^2$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

$$\Delta = \frac{1}{8}$$

Nach Fassregel : $\frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{4}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \sin^2$ ungünstig für Fassregel , weil die Fehler beliebig groß werden

2.a)

t^0 : $\frac{7}{15}\cdot(-1)^0 + \frac{16}{15}\cdot 0^0 + \frac{7}{15}\cdot 1^0 + \frac{1}{15}\cdot 0^0 - \frac{1}{15}\cdot 1^0$

$$= \frac{7+16+7+1-1}{15} = \frac{30}{15} = 2 \quad = \int_{-1}^{1} t^0\, dt$$ (korrekt)

t^1 : $-\frac{7}{15} + 0 + \frac{7}{15} + \frac{1}{15}\cdot(-1)^0 - \frac{1}{15}$

$$= \frac{-7+7+1-1}{15} = \frac{0}{15} = 0$$ (korrekt)

...

t^5 : $\frac{7}{15}\cdot(-1)^5 + \frac{16}{15}\cdot 0^5 + \frac{7}{15}\cdot 1^5 + \frac{1}{15}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{15}\cdot 1^4$

$$= \frac{-7+0+7+1-1}{15} = 0$$ (korrekt)

t^6 : $\frac{7}{15} + \frac{7}{15} - \frac{6}{15} - \frac{6}{15} = \frac{2}{15} \neq \frac{2}{7}$ (falsch)

$\Rightarrow$ für Polynome bis Grad 5 exakt

Mit $P(t_i) = f(t_i)$ und $P'(t_i) = f'(t_i)$, sowie der Eindeutigkeit der Polynominterpolation ist a) gezeigt.

2.b)

siehe unter a) Grad 6

2.c)

$$P(t)-f(t) = \frac{1}{6!}w(t)\,f^{(6)}(x)$$
$$= \frac{1}{6!}(t+1)^2\cdot t^2\cdot(t-1)^2\cdot f^{(6)}(x)$$

$$\int P(t)\,dt-\int f(t)\,dt \quad : \quad \left|\int_{-1}^{1}P(t)\,dt-\int_{-1}^{1}f(t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{6!}(t+1)^2\cdot t^2\cdot(t-1)^2\cdot f^{(6)}(x(t))\right)dt\right|$$
$$\le\frac{f^{(6)}(x)}{6!}\cdot\left|\int_{-1}^{1}(t^2-1)^2t^2\,dt\right|$$
$$=\frac{f^{(6)}(x)}{6!}\cdot\left|\int_{-1}^{1}\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt\right|$$
$$=\frac{f^{(6)}(x)}{6!}\cdot\left|\left[\frac{1}{7}t^7+\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}\right|$$
$$=\frac{f^{(6)}(x)}{6!}\cdot\left|\frac{2}{7}-\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right|$$

3.)

$$g(t)-P(t)=\frac{w(t)-P^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Für $n=2k$: $$\frac{w(t)-P^{(2k+1)}(t)}{(2k+1)!}$$

$$w(t)=(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{2k})$$
$$t_i=a+ih \quad , \quad h=b-a$$

$\Rightarrow$
$$w(t) = (t-a)(t-(a+ih))\ldots(t+a)$$
$$= \underbrace{t}_{\text{ungerade}}\cdot\underbrace{\left(t^2-a^2\right)\cdot\left(t^2-(a+ih)^2\right)}_{\text{gerade}}$$

$\Rightarrow$
$$\int_{-k}^{k}g(t)\,dt-\int_{-k}^{k}P(t)\,dt = \int_{-k}^{k}\frac{w(t)-P^{(2k+1)}(t)}{(2k+1)!}\,dt$$
$$=\frac{P^{(2k+1)}(t)}{(2k+1)!}\cdot\int_{-k}^{k}w(t)\,dt \quad =0$$

andere Variante zu 3.) :

$$w_i \quad = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t-(a+jh)}{(a+ih)-(a+jh)}\, dt$$

Setze $a = -k \quad , \quad b = k \quad , \quad n = 1$

$\Rightarrow$

$$= \frac{1}{2k} \cdot \int_{-k}^{k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2k} \frac{t-(a+j)}{(a+i)-(a+j)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2k} \cdot \int_{-k}^{k} \prod_{\substack{j=-k \\ j \neq i-k}}^{k} \frac{t-j}{i-k-j}\, dt$$

$$= \frac{1}{2k} \cdot \int_{-k}^{k} \prod_{\substack{j=-k \\ j \neq i-k}}^{k} \frac{-t+j}{k-i+j}\, dt \qquad = w_{2k-i}$$

$$2k \cdot \sum_{i=0}^{2k} \left(w_i \cdot (i-k)^{2k+1} \right) = 2k \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(w_i (i-k)^{2k+1} + w_{2k-i} (k-i)^{2k+1} \right) + 0 \right)$$

$$= 2k \cdot \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left((i-k)^{2k+1} + (k-i)^{2k+1} \right)$$

$$= 0$$

$$\int_{-k}^{k} t^{2k+1}\, dt = 0$$

$\Rightarrow$ exakt für t^{2k+1} , d.h. exakt für alle $P \in \Pi_{2k+1}$