Numerik 2 – Übung03 – Georg Kuschk

1.a)

Transformationsmatrix : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

Bei der Linksmultiplikation $Q \cdot A$ wird das Vorzeichen aller Elemente jeder zweiten Zeile vertauscht , und bei der Rechtsmultiplikation $A \cdot Q$ wird das Vorzeichen aller Elemente jeder zweiten Spalte vertauscht. Insbesondere ist aufgrund der Diagonalgestalt $Q = Q^T$ und wegen der obigen Multiplikationseigenschaften gilt $QQ^T = QQ = I$. D.h. Q ist eine orthogonale Matrix und $Q \cdot A \cdot Q^T = B$ eine Ähnlichkeitstransformation. Somit haben A und B dieselben Eigenwerte.

1.b)

Es sei $B = A - lI$ und $C = A + lI$

Es ist also zu zeigen , dass B und C dieselben Eigenwerte besitzen :

Die Forderung $d_i = -d_{n+1-i}$ bzw. $d_{n+1-i} = -d_i$ bedingt eine quasi-Spiegelung der Hauptdiagonalelemente mit vertauschtem Vorzeichen.

Für die Matrix die Matrix B gilt somit :

$$B = \begin{pmatrix} d_1 - l & g_2 & & & \\ g_2 & d_2 - l & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -d_2 - l & g_n \\ & & & g_n & -d_1 - l \end{pmatrix}$$

und für die Matrix die Matrix C gilt :

$$C = \begin{pmatrix} d_1 + l & g_2 & & & \\ g_2 & d_2 + l & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -d_2 + l & g_n \\ & & & g_n & -d_1 + l \end{pmatrix}$$

zu 1.b)

Klammert man in den Hauptdiagonalelementen der Matrix C das Vorzeichen aus ,

$$C = \begin{pmatrix} -(-d_1 - l) & g_2 & & & \\ g_2 & -(-d_2 - l) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(d_2 - l) & g_n \\ & & & g_n & -(d_1 - l) \end{pmatrix}$$

so sieht man , das dies die gleichen Hauptdiagonalelemente wie in B sind , nur „gespiegelt“ angeordnet. *

Die Nebendiagonalelemente sind bei B und C dieselben , wobei diese aber ebenfalls gespiegelt angeordnet sind , **

d.h. $g_2 = g_n$, $g_3 = g_{n-1}$, $g_4 = g_{n-2}$, ...

Mit diesen zwei festgestellten Tatsachen (* & **) und dem Entwicklungssatz für Determinanten folgt , dass $\det(B) = -\det(C)$.

Mit der obigen Definition von B und C und da die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte ist , folgt somit , dass zu jedem Eigenwert l von A auch $-l$ Eigenwert von A ist.

1.c)

Nach 1.a) sind A und $-A$ ähnlich , d.h. zu jedem Eigenwert l ist auch $-l$ Eigenwert von A.

$$\det\begin{pmatrix} 0 & g_2 & & & \\ g_2 & 0 & g_3 & & \\ & g_3 & \ddots & & \\ & & & 0 & g_n \\ & & & g_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -g_2 \det\begin{pmatrix} g_2 & 0 & & & \\ g_3 & 0 & g_4 & & \\ & g_4 & \ddots & & \\ & & & 0 & g_n \\ & & & g_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -g_2^2 \det\begin{pmatrix} 0 & g_4 & & & \\ g_4 & 0 & g_5 & & \\ & g_5 & \ddots & & \\ & & & 0 & g_n \\ & & & g_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} g_2^2 g_4^2 \cdots g_{n-2}^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & g_n \\ g_n & 0 \end{pmatrix} & \textit{für n gerade} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} g_2^2 g_4^2 \cdots g_{n-1}^2 \cdot \det(0) & \textit{für n ungerade} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} g_2^2 g_4^2 .. g_n^2 & \text{\textit{für n gerade}} \\ 0 & \text{\textit{für n ungerade}} \end{cases}$$

2.)

$$\det\left(A(e) - lI\right) = l^2 - 2l - e^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$l_1 = 1 + e$$
$$l_2 = 1 - e$$

Eigenvektoren :

$A(e) \cdot x = lx$, d.h.

$$\begin{pmatrix} e \cdot \cos\left(\frac{2}{e}\right) \pm e & -e \cdot \sin\left(\frac{2}{e}\right) \\ -e \cdot \sin\left(\frac{2}{e}\right) & -e \cdot \cos\left(\frac{2}{e}\right) \pm e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

I $\quad : e\left(\left(\cos\left(\frac{2}{e}\right) \pm 1\right) \cdot x_1 - \sin\left(\frac{2}{e}\right) \cdot x_2\right) = 0$

II. $\quad : -e\left(\sin\left(\frac{2}{e}\right) \cdot x_1 + \left(\cos\left(\frac{2}{e}\right) \pm 1\right) \cdot x_2\right) = 0$

$\Rightarrow$ Eigenvektoren x, y mit

$$x = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\left(\frac{2}{e}\right) \cdot t}{\cos\left(\frac{2}{e}\right) - 1} \\ t \end{pmatrix} \quad , \; e \neq \frac{1}{kp}$$

$$y = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\left(\frac{2}{e}\right) \cdot u}{\cos\left(\frac{2}{e}\right) + 1} \\ u \end{pmatrix} \quad , \; e \neq \frac{2}{(2k+1)p} \qquad t, u \in R \setminus \{0\}$$

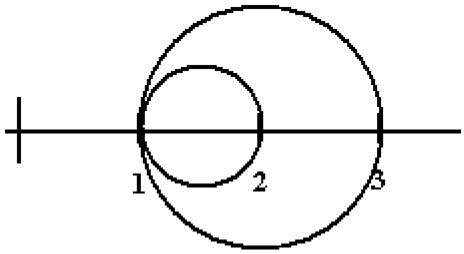
$$l_{1,2} \xrightarrow[e \to 0]{} 1$$

Die Eigenvektoren konvergieren nicht , da die Komponenten x_1 und y_1 für $e \to 0$ jeden Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen können.

3.)

Um einen Eigenwert möglichst genau abzuschätzen , ist der Gerschgorin-Kreis dieses Eigenwertes möglichst klein zu wählen , während die anderen Gerschgorin-Kreise möglichst groß sind , aber den zu untersuchenden Kreis nicht überlappen.

Skizze für den ersten Eigenwert :



Wähle $D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 d_3 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$

$A_i = D^{-1}AD$ (Vorteil : nur zwei Parameter , da sich d_1 wegkürzt)

1.Eigenwert abschätzen

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \cdot 10^{-3} & d_3 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{d_2} \cdot 10^{-3} & 2 & \frac{d_3}{d_2} \cdot 10^{-3} \\ \frac{1}{d_3} \cdot 10^{-4} & \frac{d_2}{d_3} \cdot 10^{-3} & 3 \end{pmatrix}$$

Unter der Bedingung , dass sich die Kreise gerade berühren nun die zwei Parameter bestimmen :

I. : $1 + d_2 10^{-3} + d_3 10^{-4} = 2 - \frac{1}{d_2} 10^{-3} - \frac{d_3}{d_2} 10^{-3}$

$\Rightarrow \quad d_2 + d_2^2 10^{-3} + d_2 d_3 10^{-4} = 2d_2 - 10^{-3} - d_3 10^{-3}$

$\Rightarrow \quad d_2 \approx 2 \cdot 10^{-3} \qquad (d_2 \approx 6 \text{ entfällt })$

II. : $1 + d_2 10^{-3} + d_3 10^{-4} = 3 - \frac{1}{d_3} 10^{-4} - \frac{d_2}{d_3} 10^{-3}$

$\Rightarrow \quad d_3 \approx 5 \cdot 10^{-5}$

Zur Verbesserung nocheinmal wiederholen : $\Rightarrow d_2 \approx 1 \cdot 10^{-3}$, $d_3 \approx 5 \cdot 10^{-5}$

$\Rightarrow r_1 = 1.0051 \cdot 10^{-6}$ gegenüber $l_1 - 1 = 1.0049 \cdot 10^{-6}$

Die anderen zwei Eigenwerte analog :

$\Rightarrow$

$r_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ gegenüber $l_2 - 2 = -2 \cdot 10^{-10}$

$r_3 = 1.0051 \cdot 10^{-6}$ gegenüber $l_3 - 3 = 1.0051 \cdot 10^{-6}$

4.)

siehe Quellcode
grafische Fehlerdarstellung :