Numerik 2 – Übung01 – Georg Kuschk

1.a)

$T_k(x)$ = Polynom vom Grad k

Beweis mittels vollständiger Induktion :

Induktionsanfang :

T_0 = Polynom vom Grad 0 , bzw. T_1 = Polynom vom Grad 1

Induktionsvoraussetzung :

Annahme , dass die Behauptung für k wahr ist.

Induktionsbehauptung :

Behauptung gilt auch für $k+1$.

Induktionsbeweis :

$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$

$\Rightarrow T_{k+1}(x)$ hat gleichen Grad wie $2xT_k(x)$

$T_k(x)$ hat nach Voraussetzung den Grad k

$\Rightarrow T_{k+1}(x)$ = Polynom vom Grad $k+1$

q.e.d.

Führender Koeffizient von $T_k(x)$ (bezeichnet als FK_k) für $k > 0$ ist 2^{k-1}.

Beweis mittels vollständiger Induktion :

Induktionsanfang :

$T_1(x) = x$ $FK_1 = 2^0$ w.A.

Induktionsvoraussetzung :

Annahme , dass die Behauptung für k wahr ist.

Induktionsbehauptung :

Behauptung gilt auch für $k+1$.

Induktionsbeweis :

$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$

$T_{k-1}(x)$ braucht nicht betrachtet werden , da Grad zu niedrig – führender Koeffizient ist in $2xT_k(x)$ enthalten.

Nach Voraussetzung gilt für $T_k(x)$: $FK_k = 2^{k-1}$

$\Rightarrow$ Für $T_{k+1}(x)$ gilt : $FK_{k+1} = 2 \cdot FK_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$

q.e.d.

Mit $x = \cos j$ lassen sich die Polynome darstellen als $T_n(x) = T_n(\cos j)$.

Wobei gilt : $T_n(\cos j) = \cos(nj)$

(Hoffe , in der Übung wird geklärt mittels welcher trigonometrischer Gesetze.)

Alle anderen Punkte folgen aus diesem Zusammenhang (am offensichtlichsten 1d) wegen $\cos(nj) \le 1$).

:-)

2.a)

$$c_F(l)=\det(F-lI)=\det\begin{pmatrix} -l & 0 & \cdots & 0 & -g_0 \\ 1 & -l & & \vdots & -g_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -l & -g_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -g_{n-1}-l \end{pmatrix}$$

$\left(\frac{1}{l}\right)$-faches der ersten Zeile zur zweiten Zeile addieren :

$$=\det\begin{pmatrix} -l & 0 & \cdots & 0 & -g_0 \\ 0 & -l & & \vdots & -g_1-\frac{g_0}{l} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -l & -g_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -g_{n-1}-l \end{pmatrix}$$

und nach der ersten Spalten entwickeln :

$$=-l\cdot\det\begin{pmatrix} -l & 0 & \cdots & 0 & -g_1-\frac{g_0}{l} \\ 1 & -l & & \vdots & -g_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -l & -g_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -g_{n-1}-l \end{pmatrix}$$

mit selbem Schema weiterarbeiten :

$$=-l\cdot\det\begin{pmatrix} -l & 0 & \cdots & 0 & -g_1-\frac{g_0}{l} \\ 0 & -l & & \vdots & -g_2-\frac{g_1}{l}-\frac{g_0}{l^2} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -l & -g_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -g_{n-1}-l \end{pmatrix}$$

....

$$=(-l)^{n-2}\cdot\det\begin{pmatrix} -l & -g_{n-2}-\frac{g_{n-3}}{l}-\frac{g_{n-4}}{l^2}-\ldots-\frac{g_0}{l^{n-2}} \\ 1 & -g_{n-1}-l \end{pmatrix}$$

$$=(-l)^{n-2}\cdot\det\begin{pmatrix} -l & -g_{n-2}-\frac{g_{n-3}}{l}-\frac{g_{n-4}}{l^2}-\ldots-\frac{g_0}{l^{n-2}} \\ 0 & -g_{n-1}-l-\frac{g_{n-2}}{l}-\frac{g_{n-3}}{l^2}-\ldots-\frac{g_0}{l^{n-1}} \end{pmatrix}$$

zu 2a)

$$= (-l)^{n-1}\left(-g_{n-1} - l - \frac{g_{n-2}}{l} - \frac{g_{n-3}}{l^2} - \ldots - \frac{g_0}{l^{n-1}}\right)$$

$$= (-1)^{n-1} l^{n-1}\left(-g_{n-1} - l - \frac{g_{n-2}}{l} - \frac{g_{n-3}}{l^2} - \ldots - \frac{g_0}{l^{n-1}}\right)$$

$$= (-1)^{n} l^{n-1}\left(g_{n-1} + l + \frac{g_{n-2}}{l} + \frac{g_{n-3}}{l^2} + \ldots + \frac{g_0}{l^{n-1}}\right)$$

$$= (-1)^{n}\left(l^n + l^{n-1}g_{n-1} + l^{n-2}g_{n-2} + \ldots + g_0\right)$$

$$= (-1)^{n}\left(l^n + \sum_{i=0}^{n-1} g_i l^i\right)$$

2.b)

Es muss gelten $c_F(l_i) = 0$.

Wegen a) folgt $0 = c_F(l_i) = (-1)^n\left(l_i^{\,n} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j l_i^{\,j}\right) = l_i^{\,n} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j l_i^{\,j}$

$$\Rightarrow l_i^{\,n} = -\sum_{j=0}^{n-1} g_j l_i^{\,j} \qquad *$$

Für die linke Seite der zu beweisenden Gleichung gilt :

$$y_i^T F = \left(l_i ,\, l_i^2 ,\ldots,\, l_i^{n-1} ,\, -g_0 - g_1 l_i - g_2 l_i^2 - \ldots - g_{n-1} l_i^{n-1}\right)$$

Letzte Komponente als Summe : $-g_0 - g_1 l_i - g_2 l_i^2 - \ldots - g_{n-1} l_i^{n-1} = -\sum_{j=0}^{n-1} g_j l_i^{\,j}$

Mit * folgt somit $y_i^T F = \left(l_i ,\, l_i^2 ,\ldots,\, l_i^{n-1} ,\, l_i^n\right) = l_i y_i^T$

q.e.d.

3.a)
Eigenwerte durch Gerschgorin abschätzen :

$$l_1 \in [5,7] \quad , \quad l_2 \in [1,3] \quad , \quad l_3 \in [1,5]$$

Kondition abschätzen :

$$k_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \quad \text{mit der Spektralnorm } \|A\|_2 = \sqrt{r(A^T A)}$$

Hier symmetrische Matrix : $\|A\|_2 = \sqrt{r(A)^2} = r(A) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)|$

$\Rightarrow$

$$k_2(A) = \max_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)| \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |l_i(A^{-1})|$$

Und für reguläre Matrizen A mit z.B. einem Eigenwert l gilt : l^{-1} ist Eigenwert von A^{-1}.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} k_2(A) &= \max_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)| \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |l_i(A^{-1})| = \max_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)| \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \left| \frac{1}{l_i(A)} \right| \\ &= \frac{\max\limits_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)|}{\min\limits_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)|} \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung nach Gerschgorin folgt somit

$$k_2(A) = \frac{\max\limits_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)|}{\min\limits_{i=1,\ldots,n} |l_i(A)|} \quad \leq \quad \frac{7}{1} = 7$$

3.b)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{Anfangsnäherung } y^{(0)} = (1,0,0)^T$$

Setze $\quad x^{(0)} := \dfrac{y^{(0)}}{\|y^{(0)}\|_2} = (1,0,0)^T$

$$y^{(1)} := Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} := \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_2} = \left(\frac{6}{\sqrt{37}}, 0, \frac{1}{\sqrt{37}} \right)^T$$

zu 3b)

$$y^{(2)} := Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{37}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{37}{\sqrt{37}} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} \\ \frac{9}{\sqrt{37}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{37} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} \\ \frac{9}{\sqrt{37}} \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} := \frac{y^{(2)}}{\left\|y^{(2)}\right\|_2} = \frac{\left(\sqrt{37}, -\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{9}{\sqrt{37}}\right)^T}{\sqrt{37 + \frac{1}{37} + \frac{81}{37}}} = \frac{\left(\sqrt{37}, -\frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{9}{\sqrt{37}}\right)^T}{\sqrt{\frac{1451}{37}}}$$

$$= \left(\frac{37}{\sqrt{1451}}, -\frac{1}{\sqrt{1451}}, \frac{9}{\sqrt{1451}}\right)^T \approx (0.971333, -0.0262522, 0.23627)^T$$

Näherung für den betragsgrößten Eigenwert nach der zweiten Iteration :

$$n^{(2)} := \left(x^{(1)}\right)^T y^{(2)} = \left(\frac{6}{\sqrt{37}}, 0, \frac{1}{\sqrt{37}}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{37} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} \\ \frac{9}{\sqrt{37}} \end{pmatrix} = 6 + \frac{9}{37} = \frac{231}{37} \approx 6.24324$$

4.)
Quellcode siehe beiliegende Dateien :

test.m	- Starten
vit_inverse_a.m	- Implementierung Aufgabe 4a
vit_inverse_b.m	- Implementierung Aufgabe 4b

k	$\bar{n}^{(k+1)}$ Aufgabe 4a)	$\bar{n}^{(k+1)}$ Aufgabe 4b)
1	6.36363636363636	6.36363636363636
2	6.32394366197183	6.32334514618403
3	6.32341208959804	6.32340427610174
4	6.32340439188376	6.32340427608648

Aufgabe 4a) erreicht das Abbruchkriterium im 6. Iterationsschritt
Aufgabe 4b) erreicht das Abbruchkriterium im 4. Iterationsschritt

Gruppenübungsblatt :

$(A - lI)x = 0$

1.a) trivial

1.b) $rang(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad n-1$ facher Eigenwert 0 und ein Eigenwert $\neq 0$

Zu den Eigenwerten = 0 gibt es $n-1$ linear unabhängige Eigenvektoren $v_i \perp u \quad , \; i = 2,...,n \quad .$

$$u\underbrace{v^T x}_{\in R} = \underbrace{v^T x}_{\in R} u$$

$Ax = lx \quad \Rightarrow \quad uv^T u = v^T uu \quad \Rightarrow \quad u$ ist Eigenvektor und $v^T u$ Eigenwert

1.c)

Betrachte $vv^T \quad \Rightarrow \quad n-1$ facher Eigenwert 0 und ein Eigenwert $v^T v = 1$

Eigenvektoren : $n-1$ linear unabhängige und ein Eigenvektor $= v$

$(I - 2vv^T)v = v - 2vv^T v = v - 2v = -v$

$\Rightarrow \quad -1$ ist Eigenwert zum Eigenvektor v

Jetzt beliebige orthogonale Vektoren x zu v betrachten :

$$(I - 2vv^T)x == x - 2v\underbrace{v^T x}_{=0} = x$$

$\Rightarrow \quad 1$ ist $n-1$ facher Eigenwert

2.a)

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{a}_1 = \|a_1\| = 3 \quad , \quad \tilde{v}_1 = a_1 \pm \boldsymbol{a}_1 e_1 = \begin{pmatrix} -2 \pm 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Q_1 = I - 2\frac{v_1 v_1^T}{v_1^T v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 11/15 & 2/15 \\ 0 & 1/3 & 2/15 & 14/15 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -23/5 & 8 & -2/5 \\ 0 & 14/5 & 1 & 11/5 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 A Q_1^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -12/5 & -9/5 \\ 0 & -12/5 & 222/25 & -21/25 \\ 0 & -9/5 & -21/25 & 78/25 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -27/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

... usw.

$\Rightarrow$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$