Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

7. Übungsblatt, Abgabe am 30.11.2005

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Quadratische Splines*

Durch die Stützpunkte $(0,0), (1,1), (2,0)$ soll eine interpolierende quadratische Splinefunktion gelegt werden. Setzen Sie die Lösung stückweise aus zwei quadratischen Funktionen zusammen, so dass die Splinefunktion stetig differenzierbar ist.

a) Geben Sie die Bedingungen an, die zur Berechnung der Splinefunktion gegeben sind. Wie viele Randbedingungen müssen zusätzlich angegeben werden, damit die Splinefunktion eindeutig bestimmt ist?

b) Berechnen Sie jeweils (falls möglich) die quadratischen Splines $s_3(t)$ mit den Randbedingungen

(i) $s_3'(0) = 0$,
(ii) $s_3'(0) = 2$,
(iii) $s_3'(0) = s_3'(2)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Rationale Interpolation*

Zu den Stützpunkten (t_i, f_i), $(i = 0, 1, \ldots, n+m)$ mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ wird eine rationale Funktion

$$\Phi^{n,m}(t) := \frac{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m}$$

mit $\Phi^{n,m}(t_i) = f_i$, $(i = 0, 1, \ldots, n+m)$ gesucht.

a) Warum kann die Funktion $\Phi^{n,m}(t)$ durch Interpolationsbedingungen alleine noch nicht eindeutig festgelegt werden? Geben Sie ein Gegenbeispiel an, warum z.B. die zusätzliche Bedingung $a_0 = 1$ nicht sinnvoll ist.

b) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $m = 1$ eine rationale Interpolierende der Funktion $f(t) = \tan(t)$ zu den Stützstellen $t_i = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.

c) Bestimmen Sie für $n = 1$ und $m = 2$ eine rationale Interpolierende der Funktion

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & : t < 0 \\ 0 & : t = 0 \\ 1 & : t > 0 \end{cases}$$

zu den Stützstellen $t_i = -2, -1, 1, 2$.

d) Warum ist rationale Interpolation für Aufgabe b) und c) besser geeignet als Interpolation durch Polynome?

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte) *B-Splines*

Gegeben seien die Knoten $\tau_{-2} = 0, \tau_{-1} = 1, \tau_0 = 2, \tau_1 = 4, \tau_2 = 5, \tau_3 = 6$.

a) Berechnen Sie die Werte der B-Splines $B_{-2,1}(\frac{1}{2}),\ B_{-2,2}(\frac{1}{2}),\ B_{-1,2}(\frac{1}{2})$ und $B_{-2,3}(\frac{1}{2})$.

b) Berechnen Sie für $k = 3$ den interpolierenden B-Spline durch die Punkte

ξ_j	0	1	2
f_j	0	1	0

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: B-Splines*

Gegeben seien die Stützstellen $t_i = i,\ (i = -3, -2, \ldots, 16)$.

a) Zeichnen Sie $B_{4,4}(t), B_{5,4}(t)$ und $B_{6,4}(t)$ für $t \in [t_0, t_{12}]$.

b) Zeichnen Sie den kubischen B-Spline $s_4(t) = \sum_{i=0}^{12} \alpha_i B_{i,4}(t)$ mit den Splinekoeffizienten $\alpha_i = \sin(\frac{\pi}{4} i)$ für $t \in [t_0, t_{12}]$.

c) Berechnen Sie für $t, \hat{t} \in [t_0, t_{12}]$ den *Tensorproduktspline*

$$s(t, \hat{t}) = B_{4,4}(t) B_{6,4}(\hat{t})$$

und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar (Matlab-Befehl `surf`).

Benutzen Sie zur Auswertung der $B_{i,4}(t)$ jeweils das Rekursionsschema aus Bemerkung 7.25.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.