Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

6. Übungsblatt, Abgabe am 23.11.2005

http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Minimaleigenschaft linearer Splines*

Zu einer Funktion $f \in C^1[a,b]$ und einem Gitter $\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ mit $x_0 = a$ und $x_n = b$ sei s_f die stückweise linear Interpolierende mit $s_f(x_i) = f(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

a) Wie sieht $s_f(x)$ für $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ aus?

b) Zeigen Sie die Minimaleigenschaft

$$\left\| s_f' \right\|_2 \leq \|g'\|_2 \quad \text{für alle} \quad g \in C^1[a,b] \text{ mit } g(x_i) = f(x_i),\ (i = 0, 1, \ldots, n)$$

Hinweise:

(i) $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$ (L_2-Norm)

(ii) Setzen Sie $g(x) = s_f(x) + (g(x) - s_f(x))$ und berechnen Sie $\|g'\|_2^2$

(iii) Zeigen Sie $\int_a^b s_f'(g' - s_f')\,\mathrm{d}x = 0$, indem Sie das Integral über $[a,b]$ in eine Summe von Integralen über $[x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ zerlegen und partiell integrieren. Berücksichtigen Sie dabei $s_f''(x) \equiv 0$ und $g(x_i) = f(x_i)$, $(i = 0, \ldots, n)$.

c) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(g(x_{i+1}) - g(x_i))^2}{x_{i+1} - x_i} \leq \|g'\|_2^2 .$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Bestimmung der Spline-Koeffizienten*

Bestimmen Sie das lineare tridiagonale Gleichungssystem, das zur Berechnung der Koeffizienten c_i einer kubischen Splinefunktion mit *periodischen* Randbedingungen gelöst werden muss.

Bestimmen Sie für die Stützpunkte

t_i	0	1	3	5	6
f_i	0	1	2	2	0

den kubischen Spline mit periodischen Randbedingungen.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Eindeutigkeit von Splinefunktionen*

Gegeben sei das Gitter $\Delta = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_{l+1}\}$ und die Randbedingungen

$$s_\Delta^{(k)}(t_0) = s_\Delta^{(k)}(t_{l+1}) = 0,\ (k = 0, 1, 2).$$

a) Zeigen sie: für $l < 3$ verschwindet eine kubische Splinefunktion s_Δ mit diesen Randbedingungen identisch.

b) Für $l = 3$ existiert zu jedem Wert f eindeutig eine kubische Splinefunktion s_Δ mit diesen Randbedinungen und $s_\Delta(t_2) = f$.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Eindeutigkeit von s_Δ für $f = 0$ durch Abschätzung der Zahl der Nullstellen von s''_Δ in (t_0, t_4). Daraus folgt, dass das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten eine eindeutige Lösung haben muss.

c) Berechnen Sie s_Δ explizit für folgenden Spezialfall von b):

$$t_i := -2, -1, 0, 1, 2, \quad f := 1.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: kubische Spline-Interpolation*

Berechnen Sie für $l = 2, 4, 8, 16$ zu den Stützstellen $t_i = -5 + 10 * i/(l + 1)$, $(i = 0, \ldots, l + 1)$ die interpolierenden kubischen Splines mit natürlichen Randbedingungen für die Funktion von Runge:

$$f(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad t \in [-5, 5].$$

Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar und bestimmen Sie jeweils den Interpolationsfehler auf dem Gitter `tt=-5:0.01:5` (vgl. Übungsblatt 5) und vergleichen Sie mit dem Fehler bei linearer Interpolation.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.