Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister

Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

5. Übungsblatt, Abgabe am 16.11.2005

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Besselsche Funktion*

a) Die Besselsche Funktion nullter Ordnung

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \zeta) \mathrm{d}\zeta$$

soll an äquidistanten Stützstellen $t_i = t_0 + ih, \ i = 0, 1, 2, \dots$ tabelliert werden. Welche Schrittweite h ist zu wählen, wenn bei stückweise linearer Interpolation mit Hilfe dieser Tafel der Interpolationsfehler kleiner als 10^{-6} ausfallen soll?

b) Wie verhält sich der Interpolationsfehler

$$\max_{0 \le t \le 1} |P_n(t) - J_0(t)|$$

für $n \to \infty$, wenn $P_n \in \Pi_n$ die Funktion $J_0(t)$ an den Stellen $t = t_i^{(n)} := i/n, \ i = 0, 1, \dots, n$, interpoliert.

Hinweis: Es genügt, $|J_0^{(k)}(t)| \le 1$ für $k = 0, 1, \dots$ zu zeigen.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Inverse Interpolation*

Benutzen Sie zur numerischen Lösung der Gleichung $g(y) = \cos(y) \cosh(y) + 1 = 0$ im Intervall $y \in [1.8, \ 1.9]$ die Methode der *inversen Interpolation*:

Legen Sie dazu durch die Punkte $(x_0 = g(y_0), y_0), (x_1 = g(y_1), y_1)$ ein Interpolationspolynom $P_1(x)$ und bestimmen Sie als neuen Stützpunkt $y_2 := P_1(0)$. Wiederholen Sie dieses Vorgehen für die Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2 = g(y_2), y_2)$ und das Interpolationspolynom P_2. Eine bessere Näherung für die Nullstelle ist dann $y_3 := P_2(0)$. Wiederholen Sie das Verfahren ein weiteres mal, um $y_4 := P_3(0)$ als Näherung der Nullstelle zu bestimmen. Wie groß ist jeweils das verbleibende Residuum $|g(y_2)|, |g(y_3)|$ und $|g(y_4)|$?

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Interpolationsfehler*

Die auf $I = [-1, 1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(t)$ werde durch ein lineares Polynom an den Stellen $(t_i, f(t_i))$, $(i = 0, 1)$ mit $t_0, t_1 \in I$ interpoliert. Dann ist

$$\alpha = \frac{1}{2} \max_{\tau \in I} |f''(\tau)| \cdot \max_{t \in I} |(t - t_0)(t - t_1)|$$

eine obere Schranke für den absoluten Interpolationsfehler auf I. Wie hat man t_0, t_1 zu wählen, damit α möglichst klein wird? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $(t - t_0)(t - t_1)$ und $\cos(2 \arccos t)$?.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Polynominterpolation*

Berechnen Sie mit Hilfe der Newtonschen Formel *effizient* die interpolierenden Polynome P_{01} bis $P_{01\ldots9}$ zu $f(t) = \sin(t)$ und den Stützstellen

$$\begin{array}{ccccccccc} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ -1/2 & 1/2 & -1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & -3/4 & 3/4. \end{array}$$

Das Polynom höchstens k-ten Grades $P_{01\ldots k}$ soll dabei nur die Stützstellen $t_0, \ldots, t_k$ berücksichtigen. Benutzen Sie zur Berechnung des Polynoms $P_{01\ldots k}$ das bereits für das Polynom $P_{01\ldots(k-1)}$ berechnete Steigungsschema weiter.

Stellen Sie die Funktion $f(t)$ und die interpolierenden Polynome $P_{01}, \ldots, P_{0\ldots8}$ für $t \in [-1, 1]$ grafisch dar.

Bestimmen Sie für `tt=-1:0.01:1` den Fehler $\max_{t\in\mathtt{tt}} |f(t) - P_{0\ldots k}(t)|$ und vergleichen Sie ihn mit dem aus der Vorlesung bekannten Restglied der Polynominterpolation.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.