Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005

Numerische Mathematik II

4. Übungsblatt, Abgabe am 09.11.2005

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Eigenschaften der Singulärwertzerlegung*

Sei $U^TAV = \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m\times n},\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ U \in \mathbb{R}^{m\times m},\ V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Singulärwertzerlegung von A mit den Singulärwerten $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, wobei $p = \min(m, n)$. Zeigen Sie:

a) Sind u_i und v_i die Spalten von U bzw. V, so ist

$$Av_i = \sigma_i u_i \quad \text{und} \quad A^T u_i = \sigma_i v_i \quad \text{für } i = 1, \dots, p.$$

b) Falls $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$, so gilt

$$\operatorname{Rang} A = r, \quad \ker A = \operatorname{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\} \quad \text{und} \quad \operatorname{im} A = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\}.$$

c) Die Kondition von A bzgl. der Euklidischen Norm ist der Quotient von größtem und kleinstem Singulärwert, d.h.

$$\kappa_2(A) = \operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|} = \frac{\sigma_1}{\sigma_p}.$$

d) Die Quadrate $\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2$ der Singulärwerte sind Eigenwerte von A^TA und AA^T zu den Eigenvektoren $v_1, \dots, v_p$ bzw. $u_1, \dots, u_p$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Lagrange-Polynome und Neville-Algorithmus*

a) Zu den $n + 1$ Interpolationsstützstellen $t_0, t_1, \dots, t_n$ seien $L_j^{(n)}(t)$ die Lagrangeschen Basispolynome mit $L_j^{(n)}(t_i) = \delta_{ij}$.

Zeigen Sie, dass $\sum_{j=0}^n L_j^{(n)}(t) \equiv 1$ und $\sum_{j=0}^n t_j L_j^{(n)}(t) \equiv t$ gelten.

b) Gegeben seien die Stützpunkte

t_i	-1	0	2	3
f_i	-1	3	11	27

Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Neville den Wert des interpolierenden Polynoms an der Stelle $t = 1$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Kubische Hermite-Interpolation*

An vorgegebenen Stützstellen $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ seien Funktionswerte $f(t_i)$, $(i = 0, \ldots, n)$ und Ableitungen $f'(t_i)$, $(i = 0, \ldots, n)$ vorgegeben. Gesucht ist eine stückweise kubische Funktion $\varphi(t)$, die die Bedingungen $\varphi(t_i) = f(t_i)$ und $\varphi'(t_i) = f'(t_i)$, $(i = 0, \ldots, n)$ erfüllt.

Auf einem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ sei $\varphi(t)$ definiert durch

$$\varphi(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i.$$

Die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i lassen sich durch die Forderungen

$$\varphi(t_i) = f(t_i), \quad \varphi'(t_i) = f'(t_i), \quad \varphi(t_{i+1}) = f(t_{i+1}), \quad \varphi'(t_{i+1}) = f'(t_{i+1})$$

bestimmen. Geben Sie das lineare Gleichungssystem an, das zur Berechnung von a_i, b_i, c_i, d_i gelöst werden muss.

Bestimmen Sie die Funktion $\varphi(t)$ zu

$$\begin{array}{lll} t_0 = 0, & f(t_0) = 0, & f'(t_0) = 1, \\ t_1 = 1, & f(t_1) = 0, & f'(t_1) = -\frac{1}{2}, \\ t_2 = 2, & f(t_2) = 0, & f'(t_2) = 0 \end{array}$$

und skizzieren Sie $\varphi(t)$ für $t \in [0, 2]$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Singulärwertzerlegung*

Schreiben Sie eine Funktion `sv=gesvd1(A)`, die einen singulären Wert der Matrix `A` mit dem in der Vorlesung (Bemerkung 6.25 und 6.26) vorgestellten Algorithmus berechnet. Brechen Sie die Iteration ab, wenn $|B_{1,2}| < 10^{-16}$. Dann ist $|B_{1,1}|$ eine Näherung für einen Singulärwert von A.

Zur Durchführung der Givens-Rotationen können sie die Funktion `givensrot` von der Website zur Vorlesung benutzen.

Testen Sie Ihre Funktion an den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

und

`rand(5,4)`

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.