Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005

Numerische Mathematik II

3. Übungsblatt, Abgabe am 02.11.2005

Allgemeine Hinweise zur Vorlesung und zum Übungsablauf, die Übungsblätter und Lösungshinweise sind auf der Website zur Vorlesung und Übung zu finden:

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Eigenwerte von Tridiagonalmatrizen*

a) Man zeige: λ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ auch Eigenwert von B ist, mit

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & 0 \\ \beta_2 & \delta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \beta_n & \delta_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta_1 & -\gamma_2 & & 0 \\ -\beta_2 & \delta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\gamma_n \\ 0 & & -\beta_n & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Tipp: A und B sind ähnlich, geben Sie eine geeignete Transformationsmatrix an.

b) Zeigen Sie für die reelle symmetrische Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_2 & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_i &= -\delta_{n+1-i}, \qquad & i &= 1, \ldots, n, \\ \gamma_i &= \gamma_{n+2-i}, \qquad & i &= 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

dass mit jedem Eigenwert λ von A auch $-\lambda$ Eigenwert von A ist.

c) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & & 0 \\ \gamma_2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ 0 & & \gamma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}, \; i = 2, \ldots, n$$

symmetrisch zu 0 liegen und dass

$$\det(A) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \gamma_2^2 \gamma_4^2 \ldots \gamma_n^2 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Kondition des Eigenwert-Problems*

Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_i(\varepsilon)$ und Eigenvektoren $x_i(\varepsilon)$ der Matrix

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos(2/\varepsilon) & -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) \\ -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) & 1-\varepsilon\cos(2/\varepsilon) \end{pmatrix}$$

Wie verhalten sich $A(\varepsilon), \lambda_i(\varepsilon)$ und $x_i(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$? Vergleichen Sie die Werte mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Verbesserte Eigenwertabschätzung*

Schätzen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-3} & 10^{-4} \\ 10^{-3} & 2 & 10^{-3} \\ 10^{-4} & 10^{-3} & 3 \end{pmatrix}$$

möglichst genau ab.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gerschgorin für die Matrizen $A_i = D_i^{-1}AD_i$ mit geeigneten Diagonalmatrizen $D_i,\ (i = 1,2,3)$ und beachten Sie, dass Sie nur dann eine Aussage über die Lage eines einzelnen Eigenwerts treffen können, wenn der entsprechende Gerschgorin-Kreis sich mit keinem anderen Kreis überlappt.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Lanczos-Verfahren*

Berechnen Sie mit dem Verfahren von Lanczos (vgl. Vorlesung, Bemerkung 6.19) die Tridiagonalmatrizen $T_k = Q_k^T A Q_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Die Matrix A sei die Diskretisierungsmatrix des zweidimensionalen Laplace-Operators (vgl. Numerische Mathematik 1, 11. Übung):

$$A = \begin{pmatrix} A_D & -I & & 0 \\ -I & A_D & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & & -I & A_D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2} \quad \text{mit} \quad A_D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Diese Matrix lässt sich in `MATLAB` mit den Befehlen

```
nn=n*n;e=ones(nn,1);el=e;el(n:n:nn)=0;
A=spdiags([-e -el 4*e -[0;el(1:nn-1)] -e],[-n -1 0 1 n],nn,nn);
```

erzeugen.

Bestimmen Sie für $n = 25$ und $k = 1,\dots,120$ mit Hilfe der `MATLAB`-Funktion `eig` den maximalen Eigenwert $\lambda_{k,\max}$ von T_k und stellen Sie den Fehler $\left|\frac{\lambda_{k,\max}-\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\max}(A)}\right|$ grafisch dar (`semilogy`). Benutzen Sie als Vergleichswert den exakten Wert $\lambda_{\max}(A) = 4(1+\cos\frac{\pi}{n+1})$.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.