Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005

Numerische Mathematik II

2. Übungsblatt, Abgabe am 26.10.2005

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Verallgemeinertes Eigenwertproblem*

Zu gegebenen Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt

$$(A, B) := \{A - zB \,:\, z \in \mathbb{C}\}$$

Matrixbüschel. Die Menge $\sigma(A, B)$ der Eigenwerte von (A, B) wird definiert als

$$\sigma(A, B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda B) = 0\}.$$

Das *verallgemeinerte Matrixeigenwertproblem* lautet: finde $\lambda \in \sigma(A, B)$ und einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, so dass

$$Ax = \lambda Bx.$$

a) Geben Sie für folgende Matrixbüschel (A, B) das charakteristische Polynom $\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(A - \lambda B)$ und die Menge $\sigma(A, B)$ der Eigenwerte λ an:

$$\text{i)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie zu den Matrizen i) die verallgemeinerten Eigenwerte und Eigenvektoren.

c) Für das Matrixbüschel ii) schreibt man auch „$\infty \in \sigma(A, B)$“. Warum?

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Transformation auf Hessenbergform*

Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

durch orthogonale Transformationen in eine zu A ähnliche Matrix in Tridiagonalform.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Konvergenz beim QR-Verfahren mit und ohne Shift*

Das QR-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte einer Matrix A durch wiederholte Ähnlichkeitstransformationen ließ sich durch Shift der zu transformierenden Matrix in seiner Konvergenz gegen eine Diagonalgestalt beschleunigen. Die Auswirkungen des Shifts auf die Abnahme der Nichtdiagonalelemente wollen wir anhand des folgenden Beispiels untersuchen.

Führen Sie einen QR-Schritt mit Shift σ_1 durch, d.h. machen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $A - \sigma_1 I =: QR$ und berechnen Sie die Transformierte mit Rück-Shift $A_1 := RQ + \sigma_1 I$. Gehen Sie von der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ und

a) σ_1=0, d.h. ohne Shift,

b) σ_1=1, d.h. mit Shift,

aus. Wie ändert sich die Konvergenz der Nicht- bzw. Nebendiagonalelemente im Vergleich A_1 für $\sigma_1 = 0$ zu A_1 mit $\sigma_1 = 1$?

Hinweis: Gehen Sie bei Q von der orthogonalen Rotationsmatrix $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ aus und ermitteln Sie den Rotationswinkel φ durch die Forderung $r_{21} = 0$ (R ist obere Dreiecksmatrix!). Lösen Sie dazu zunächst die Gleichung $A - \sigma_1 I = QR$ nach R auf: $R = Q^T(A - \sigma_1 I)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: QR-Verfahren zur Eigenwertberechnung*

Implementieren Sie das QR-Verfahren mit explizitem Shift nach Wilkinson zur Berechnung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix (`function ew=syev(A)`).

Transformieren Sie die Matrix hierzu zunächst auf Tridiagonalgestalt (z.B. mit dem Matlab-Befehl `hess`) und berechnen Sie die QR-Zerlegung in jedem Iterationsschritt mit dem MATLAB-Befehl `qr` oder einer für Tridiagonalmatrizen optimierten Version der Funktion `geqrf` (neuer Name: `gtqrf`).

Testen Sie Ihre Funktion an Beispiel 6.17 aus der Vorlesung.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.