Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

13. Übungsblatt, Abgabe am 25.01.2006

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Bisektion und regula falsi*

Ausgehend von zwei Punkten $a < b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ kann eine Nullstelle einer stetigen Funktion f durch Bisektion gefunden werden: Berechnet man $f((a+b)/2)$, so kann man anhand des dortigen Vorzeichens die eine Hälfte des Intervalls ausschließen und auf diese Weise $b-a$ halbieren.

a) Betrachten Sie als Beispiel die Funktion $f(x) := x^2 - 4$ und führen Sie ausgehend von $a_0 = 1$ und $b_0 = 4$ zwei Iterationsschritte der Bisektion durch. Kann der Algorithmus die Nullstelle $f(2) = 0$ exakt finden?

b) Statt des Intervallmittelpunkts $(a+b)/2$ kann man auch den Wert

$$x_{n+1} = a_n - f(a_n)\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}, \qquad \begin{array}{l} a_{n+1} = x_{n+1} \text{ falls } f(a_n) \cdot f(x_{n+1}) > 0, \\ b_{n+1} = x_{n+1} \text{ sonst} \end{array}$$

verwenden. Dieses Verfahren nennt man auch *regula falsi*.

Berechnen Sie mir der *regula falsi* 2 Iterationsschritte zur Lösung von $\cos(x) = 0$ für $a = 1$, $b = 2$ und geben Sie den verbleibenden Fehler an.

c) Auch die *regula falsi* hat eine unerwünschte Eigenschaft: geben Sie eine Funktion f und Startwerte a_0, b_0 an, so dass für die Intervalllänge $b_n - a_n \geq C, \forall n \in \mathbb{N}$ mit einer Konstanten $C > 0$ gilt.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Newton-Verfahren*

a) Finden Sie heraus, wie Sie in Maple oder Mathematica die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestimmen können. Beide Programme und die zugehörige Dokumentation sind im Windows 2000-Pool installiert.

b) Führen Sie 2 Schritte des Newtonverfahrens zur Berechnung einer Nullstelle $f(x, y) = 0$ für

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x+y) - x \\ 3\cos(x^2 + y^2) - 1 \end{pmatrix}$$

mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $y_0 = 0$ aus.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Algorithmus* `TOMS 618`

Für Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, deren Jacobimatrix eine bekannte Besetztheitsstruktur mit vielen Nullelementen hat (dünn besetzte Matrix), kann die Jacobimatrix mit deutlich weniger als n zusätzlichen Funktionsauswertungen berechnet werden.

a) Zeigen Sie

$$\frac{F(x + he_i + he_j) - F(x)}{h} \approx F_i(x) + F_j(x), \quad F_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i},\ F_j(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_j},\ i \neq j$$

b) Leiten Sie mit Hilfe von a) eine Formel zur Berechnung von $F_i(x)$ und $F_j(x)$ her, die mit nur einer zusätzlichen F-Auswertung auskommt ($F(x)$ sei schon bekannt), falls $(F_i(x))_k = 0$ oder $(F_j(x))_k = 0$ für jedes $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ gilt.

c) Verallgemeinern sie diese Formel zur Berechnung von $F_{i_1}(x), \dots, F_{i_l}(x)$, falls sich paarweise verschiedene Indices $i_1, \dots, i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$ finden lassen, so dass für jedes $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ höchstens ein Element in der k-ten Zeile von $(F_{i_1}(x), \dots, F_{i_l}(x))$ ungleich Null ist.

   Geben Sie ein Verfahren an, wie die Jacobimatrix einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit nur drei zusätzlichen F-Auswertungen berechnet werden kann, wenn bekannt ist, dass die Jacobimatrix F_x Tridiagonalstruktur hat.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Komplexe Fixpunktiterationen und Fraktale*

Untersuchen Sie, gegen welchen Wert die Fixpunktiteration

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^6 - 1}{6z_n^5}$$

abhängig vom Startwert $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Diskretisieren Sie dazu das Rechteck $[-2, 2] \times [-2, 2]i$ in der komplexen Zahlenebene durch ein geeignetes Gitter (z.B. 499×499 Punkte). Brechen Sie die Iteration jeweils ab, wenn $|z_n^6 - 1| < 10^{-5}$ gilt oder nach maximal 100 Iterationsschritten. Stellen Sie jeweils das Argument (`angle`) von z_n am Ende der Iteration abhängig von z_0 grafisch dar. (`MATLAB`-Befehle `surf(...)`, `view(90,90)`). Dabei sollten Sie Argumente nahe bei $\pm\pi$ besonders behandeln um eine schöne grafische Darstellung zu erhalten.

Hinweis: Diese Fixpunktiteration entspricht dem Newton-Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $z^6 = 1$. Damit können die sechsten Einheitswurzeln bestimmt werden.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.