Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

12. Übungsblatt, Abgabe am 18.01.2006

Allgemeine Hinweise zur Vorlesung und zum Übungsablauf, die Übungsblätter und Lösungshinweise sind auf der Website zur Vorlesung und Übung zu finden:

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Banachscher Fixpunktsatz*

Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$f(x) = 2x + \ln(1 + e^x) = 0$$

a) Formen Sie dieses Nullstellenproblem in eine geeignete Fixpunktgleichung $x = \varphi(x)$ um, so dass φ auf $\mathbb{R}$ kontrahierend ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass obige Gleichung genau eine Lösung x^* besitzt.

c) Wieviele Iterationsschritte der Fixpunktiteration zu a) benötigt man ausgehend von $x_0 = 0$ maximal, um eine Näherungslösung für x^* mit $|x_n - x^*| \leq 10^{-3} \ln 2$ zu erhalten?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Δ^2-*Methode von Aitken*

Zur Konvergenzbeschleunigung des linear konvergenten Fixpunktverfahrens im $\mathbb{R}^1$

$$x_{i+1} := \varphi(x_i), \quad x_0 \text{ vorgegeben, } x^* \text{ Fixpunkt}$$

kann man die sogenannte Δ^2-Methode von Aitken verwenden. Dabei wird zu der Folge (x_i) die transformierte Folge $(\bar{x}_i)$

$$\bar{x}_i := x_i - \frac{(\Delta x_i)^2}{\Delta^2 x_i}$$

berechnet, wobei Δ der Differenzenoperator $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$ ist.

a) Zeigen Sie: Gilt für die Folge (x_i) und $x_i \neq x^*$, dass

$$x_{i+1} - x^* = (\alpha + \delta_i)(x_i - x^*),$$

wobei $|\alpha| < 1$ und (δ_i) eine Nullfolge, $\lim_{i\to\infty} \delta_i = 0$, so existiert die Folge $(\bar{x}_i)$ für hinreichend große i und hat die Eigenschaft

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\bar{x}_i - x^*}{x_i - x^*} = 0.$$

b) Testen Sie diese Methode mit dem Startwert $x_0 = 1.2$ an den Beispielen

$$\varphi_1(x) := \frac{1}{2} \tan x \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(x) := \arctan 2x.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Konvergenz von Iterationsverfahren*

Zur Bestimmung einer Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ kann die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})^2 - 0.5f(x^{(k)})f''(x^{(k)})}$$

verwendet werden unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ dreimal stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass die Konvergenzordnung (mindestens) $p = 3$ ist.

Wie lauten die daraus resultierenden Iterationsformeln zur Berechnung von $\sqrt{a}$ als Lösung von $f(x) = x^2 - a = 0$ und von $\sqrt[3]{a}$ als Lösung von $f(x) = x^3 - a = 0$?

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Romberg-Quadratur*

Implementieren Sie die Romberg-Quadratur in Matlab/Octave. Berechnen Sie damit Näherungswerte für die Integrale

$$\text{a) } I_a = \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t \qquad \text{b) } I_b = \int_{-2}^{2} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad (\text{exakter Wert: } I_b = 2\arctan 2)$$

und protokollieren Sie den Integrationsfehler für die Folge $\mathcal{F}_R = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Was lässt sich daraus über die Genauigkeit der Approximation sagen?

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.