Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

11. Übungsblatt, Abgabe am 11.01.2006

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Euler-Maclaurinsche Summenformel*

Zeigen Sie mit Hilfe der Euler-Maclaurinschen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Legendre-Polynome*

Betrachten Sie die Legendre-Polynome $p_k(t) := \dfrac{k!}{(2k)!}\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(t^2-1)^k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

a) Zeigen Sie, dass der höchste Koeffizient von $p_k(t)$ gleich 1 ist.

b) Verifizieren Sie die Orthogonalität dieser Polynome, $< p_i, p_j >= 0$ für $i < j$ bez. $\omega \equiv 1$.

   Hinweis: Partielle Integration, unter Verwendung von $\dfrac{\mathrm{d}^{2i+1}}{\mathrm{d}t^{2i+1}}(t^2-1)^i \equiv 0$ und der Teilbarkeit der Polynome $\dfrac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}(t^2-1)^k$ für $l < k$ durch $t^2 - 1$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Fehlerakkumulation*

Zu berechnen seien die Integrale $I_n = \int_1^2 (\ln t)^n \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots$.

a) Zeigen Sie, dass die I_n der Rekursion

$$I_n = 2(\ln 2)^n - nI_{n-1}, \quad n \geq 2 \quad (R)$$

   genügen.

b) Es ist $I_1 = 0.3863\ldots$ und $I_7 = 0.0124\ldots$. Untersuchen Sie die Verstärkung eines absoluten Eingabefehlers in der Größenordnung von 10^{-5} bei der Berechnung von

   (i) I_7 aus I_1 mittels (R) (Vorwärtsrekursion)

   (ii) I_1 aus I_7 mittels (R) (Rückwärtsrekursion)

   Rundungsfehler können vernachlässigt werden.

c) Benutzen Sie (R) als Rückwärtsrekursion zur Berechnung von I_n aus I_{n+k} mit dem Startwert $I_{n+k} = 0$ Wie hat man k zu wählen, um mit diesem Verfahren I_7 bei exakter Rechnung auf 4 oder auf 8 Stellen genau zu berechnen?

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Numerische Differentation*

a) *Differentation durch Integration*

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt für die Ableitung einer Funktion $f(t)$, die auf einer Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt t analytisch ist:

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K_r(t)} \frac{f(z)}{(z-t_0)^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(t + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Für reelle Funktionen $f(t)$ kann der Integrand durch seinen Realteil ersetzt werden, da das Ergebnis reell ist.

Berechnen Sie unter Verwendung von (1) mit Hilfe der Matlab-Funktionen `quad` und `quadl` Näherungen für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^t$ an der Stelle $t = 1$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

b) *Extrapolation von Differenzenquotienten*

Der zentrale Differenzenquotient zur Berechnung der ersten Ableitung

$$f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}$$

besitzt eine h^2-Entwicklung.

Bestimmen Sie durch Extrapolation Formeln zur Berechnung der ersten Ableitung einer Funktion, die einen Fehler der Größenordung $\mathcal{O}(h^4)$ und $\mathcal{O}(h^6)$ haben.

Testen Sie den zentralen Differenzenquotienten und die Extrapolationsformeln an der Funktion $f(t) = e^t$ an der Stelle $t = 1$ für $h \in [10^{-16}, 10^0]$ und stellen Sie die Fehler grafisch dar. Welche Schrittweiten h sind jeweils optimal?

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.