Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005/2006

Numerische Mathematik II

10. Übungsblatt, Abgabe am 21.12.2005

http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Mittlere Tagestemperatur*

Die mittlere Temperatur der Sonneneinstrahlung am 21. Juni sei definiert durch:

$$\tau_m = \frac{1}{t_U - t_A} \int\limits_{t_A}^{t_U} \tau(t)\mathrm{d}t$$

$$\begin{array}{rcl} \tau(t) & \ldots & \text{Temperatur zur Zeit } t \\ t_A = \ \ 4^{00} & \ldots & \text{Sonnenaufgang} \\ t_U = 20^{00} & \ldots & \text{Sonnenuntergang} \end{array}$$

τ_m soll aus nur zwei Tagestemperaturen ermittelt werden. Zu welchen Tageszeitpunkten sind die Temperaturen zu messen, um ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten? Geben Sie die Quadraturformel explizit an.

Hinweis: Transformieren Sie das Integral auf das Intervall $[-1, 1]$ und bestimmen Sie die Gewichte *und* Knoten so, dass Polynome von möglichst hohem Grad exakt integriert werden.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Filon-Quadratur*

Gesucht ist eine Quadraturformel, um Integrale der Form

$$I(f, \alpha) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin(\alpha t)\mathrm{d}t$$

für ganzzahliges $\alpha \gg 1$ effizient zu berechnen.

a) Bestimmen Sie analytisch $I_k := \int_0^{2\pi} t^k \sin(\alpha t)\mathrm{d}t$ für $k = 0, 1, 2$ und festes $\alpha \in \mathbb{N}$ (Formelsammlung oder partielle Integration).

b) Bestimmen Sie Gewichte w_0, w_1, w_2 so, dass $I(p, \alpha) = w_0 p(0) + w_1 p(\pi) + w_2 p(2\pi)$ exakt ist für alle $p \in \Pi_2$.

c) Berechnen Sie mit dieser Quadraturformel eine Näherung für $\int_0^{2\pi} \sin(t/4)\sin(10t)\mathrm{d}t$ (exakter Wert: $-160/1599$).

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Quadratur bei singulärem Integrand*

Das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(\sqrt{t}) \mathrm{d}t \quad \text{(exakter Wert: } I(f) = 2(\mathrm{e} - 1))$$

soll numerisch berechnet werden.

Eine einfache Anwendung der Simpsonregel oder Trapezsumme gelingt nicht, da der Integrand an der linken Intervallgrenze eine Singularität besitzt. Ein Ansatz zur Behandlung der Singularität wäre die Aufspaltung des Integrationsintervalls in $[0,1] = [0,2h] \cup [2h,1],\ h < 1/2$. Auf den rechten Teil wird die Simpsonregel angewandt, auf den linken Teil dagegen die Quadraturformel

$$Q(\varphi) := \frac{2}{15}\sqrt{2h}(6\varphi(0) + 8\varphi(h) + \varphi(2h)), \quad \varphi(t) := \exp(\sqrt{t}).$$

Man zeige: $Q(\varphi)$ ergibt sich aus dem Ansatz

$$\int_0^{2h} \omega(t)p(t)\mathrm{d}t = w_0 p(0) + w_1 p(h) + w_2 p(2h) \quad \forall\, p \in \Pi_2$$

mit $\omega(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}$ als Gewichtsfunktion.

Geben Sie für $h = 0.1$ und $h = 0.05$ Näherungen für $I(f)$ an, und vergleichen Sie diese mit dem exakten Wert. Benutzen Sie für das Intervall $[2h, 1]$ jeweils die Keplersche Fassregel.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Adaptive Trapezsumme*

Programmieren Sie in Matlab eine *adaptive Trapezsumme* zur numerischen Berechnung des Integrals $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Die Stützstellen werden hier erst während der Integration so bestimmt, dass möglichst wenig Funktionsauswertungen benötigt werden und der Quadraturfehler unter einer vorgegebenen Fehlerschranke TOL bleibt.

Beginnen Sie dazu am linken Rand und mit einer Anfangsschrittweite $h \le b - a$. Berechnen Sie Näherungen $T(h)$ und $T(h/2)$ für das Integral über das Teilintervall $[a, a+h]$ mit der Trapezregel ($T(h)$) und mit der Trapezsumme ($T(h/2)$) zu den Stützstellen $a, a+h/2, a+h$.

Aus diesen beiden Näherungen kann der *Fehlerschätzer* $\varepsilon = \frac{1}{3}(T(h/2) - T(h))$ bestimmt werden. Falls der Fehler in diesem Teilintervall zu groß ist, d.h. $|\varepsilon| > \frac{h}{b-a} TOL$, dann wiederhole den aktuellen Schritt mit einer kleineren Schrittweite, z.B. mit der halben Schrittweite. Andernfalls benutze $T(h/2)$ als Näherung für das aktuelle Teilintervall und setze die Berechnung am Punkt $a + h$ fort, bis b erreicht wird.

Berechnen Sie mit dieser Funktion den Wert des Integrals

$$\int_{-5}^{5} \frac{1}{10^{-2} + t^2} \mathrm{d}t$$

mit Anfangsschrittweite $h = 1$ und $TOL = 10^{-2}$.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.