Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. M. Arnold, B. Burgermeister
Wintersemester 2005

Numerische Mathematik II

1. Übungsblatt, Abgabe am 19.10.2005

`http://sim.mathematik.uni-halle.de/~arnold/courses/SoS05.num/`

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome*

Die Tschebyscheff-Polynome kann man durch die Rekursion

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

definieren. Zeigen Sie:

a) T_k ist ein Polynom vom Grad k. Für $k > 0$ lautet der führende Koeffizient 2^{k-1}.

b) Es gilt $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ für $|x| \le 1$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$

c) Es gilt $T_k(x) = \frac{1}{2}\left((x + \sqrt{x^2-1}\,)^k + (x - \sqrt{x^2-1}\,)^k\right)$ für $|x| \ge 1$.

d) Die Tschebyscheff-Polynome genügen der Abschätzung $|T_k(x)| \le 1$ für $|x| \le 1$.

e) T_{2k} ist ein gerades Polynom, T_{2k+1} ist ein ungerades Polynom.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Frobenius-Matrix*

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_F(\lambda) := \det(F - \lambda I)$ der Frobenius-Matrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & & & -\gamma_0 \\ 1 & \ddots & & & -\gamma_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -\gamma_{n-2} \\ & & & 1 & -\gamma_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

b) Zeigen Sie: Hat F die einfachen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so gilt: $y_i^T = (1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-1})$ ist Linkseigenvektor von F zum Eigenwert λ_i, d.h. es gilt $y_i^T F = \lambda_i y_i^T$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie unter Verwendung des *Satzes von Gerschgorin* Abschätzungen für die Eigenwerte von A und für die Kondition $\kappa_2(A)$ an.

b) Führen Sie zwei Schritte der klassischen Vektoriteration mit dem Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ durch und geben Sie eine Näherung für den betragsgrößten Eigenwert von A an.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Programmieraufgabe: Inverse Vektoriteration nach Wielandt*

Implementieren Sie die inverse Vektoriteration für symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Mit fester Iterationsmatrix $B = A - \bar{\lambda} I$.

b) Mit der in jedem Iterationsschritt aktualisierten Matrix $B_k = A - \bar{\nu}^{(k)} I$ (vgl. Vorlesung, Bemerkung 6.11).

Brechen sie die Iteration ab, falls $\left| \frac{\bar{\nu}^{(k+1)} - \bar{\nu}^{(k)}}{\bar{\nu}^{(k)}} \right| < 10^{-8}$, wobei $\bar{\nu}^{(k+1)}$ der im k-ten Schritt berechnete Schätzwert für den Eigenwert λ ist, und $\bar{\nu}^{(0)} = \bar{\lambda}$ die Anfangsnäherung.

Testen Sie die beiden Verfahren für die Matrix A aus Aufgabe 3) mit der Anfangsnäherung $\bar{\lambda} = 6, \quad x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$. Geben Sie die berechneten Näherungswerte $\bar{\nu}^{(k+1)}$ für $k = 1, 2, 3, 4$ an.

Abgabe der Programmieraufgabe per eMail an `burgermeister@mathematik.uni-halle.de`.