Informatik 3 – Übung 09 – Georg Kuschk

9.1)
Das Tupel ({1,2,3,5,6,10,15,30} , kgV , ggT , inv , 30 , 1) mit inv(x):=30/x ist eine boolesche Algebra, wenn für alle $x,y,z \in M$ folgende 7 Regeln gelten :

(Zur besseren Übersicht werden allerdings zuerst die gegebenen Operationssymbole mit den folgenden Operationssymbolen gleichgesetzt :
"kgV(x,y)" = "x+y" , "ggT(x,y)" = "x*y" , "inv(x)" = " x' ")

1.) Idempotenz

x+x = x und x*x = x

Beweis :
kgV(x,x) = x trivialerweise
ggT(x,x) = x trivialerweise
$\longrightarrow$ Idempotenz erfüllt

2.) Kommutativität

x+y = y+x und x*y = y*x

Beweis :
kgV(x,y) = kgV(y,x) trivialerweise (Reihenfolge der Operanden ist egal)
ggT(x,y) = ggT(y,x) trivialerweise
$\longrightarrow$ Kommutativität erfüllt

3.) Assoziativität

x*(y*z) = (x*y)*z und x+(y+z) = (x+y)+z

Beweis :
Zeigen, dass ggT(x , ggT(y,z)) = ggT(ggT(x,y) , z) gilt : (*1)
Sei d=ggT(ggT(x,y) , z).
Dann gilt nach der Definition des ggT : d | ggT(x,y) , also d | x und d | y , und d | z .
Es gilt also d | ggT (y,z) und weiterhin d | ggT(x , ggT(y,z)).
D.h. die rechte Seite der Gleichung (*1) teilt die linke Seite.
Umgekehrt gilt :
Sei d=ggT(x , ggT(y,z)).
Dann gilt nach der Definition des ggT : d | x und d | ggT(y,z) , also d | y und d | z
Es gilt also d | ggT(x,y) und weiterhin d | ggT(ggT(x,y) , z).
D.h. es teilt auch die linke Seite der Gleichung (*1) die rechte Seite.
Somit ist die Gleichheit gezeigt.

Noch zeigen , dass kgV(x , kgV(y,z)) = kgV(kgV(x,y) , z) gilt :
kgV(kgV(x,y) , z) = kgV(x*y/ggT(x,y) , z) = x*y*z / ggT(ggT(x,y) , z)
= x*y*z / ggT(x , ggT(y,z)) = kgV(x , y*z/ggT(y*z)) = kgV(x , kgV(y,z))

$\longrightarrow$ Assoziativität erfüllt

4.) Absorption

x+(x*y) = x und x*(x+y) = x

Beweis :
Zuerst zeigen , dass kgV(x , ggT(x,y)) = x :
Sei d=kgV(x , ggT(x,y)).
Es gilt d | x.
Umgekehrt :
Sei a:=ggT(x,y).
Wegen x | kgV(x,a) gilt also x | kgV(x , ggT(x,y)).
Somit ist die Gleichheit gezeigt.

Als zweites noch zeigen, dass ggT(x , kgV(x,y)) = x :
Sei d=ggT(x , kgV(x,y)).
Es gilt d | x .
Umgekehrt gilt wegen x | x und x | kgV(x,y) : x | ggT(x , kgV(x,y)) .
Somit ist die Gleichheit gezeigt.
$\longrightarrow$ Absorptionsgesetze erfüllt

5.) Distributivität

x*(y+z) = (x*y)+(x*z)   und   x+(y*z) = (x+y)*(x+z)

Beweis :

Zuerst zeigen, dass ggT(x , kgV(y,z)) = kgV(ggT(x,y) , ggT(x,z)) :

Es sei die linke Seite d:=ggT(x , kgV(y,z)) und die rechte Seite e:=kgV(ggT(x,y) , ggT(x,z)) .
Wegen ggT(x,y) | x und ggT(x,z) | x gilt : e | x .
Ebenso lässt sich folgern : e | kgV(y,z) und somit e | d .
Umgekehrt gilt :
Wegen y | kgV(y,z) und z | kgV(y,z) , gilt auch ggT(x,y) | d und ggT(y,z) | d und somit d | e .
Somit ist die Gleichheit gezeigt.

kgV(x , ggT(y,z)) = ggT(kgV(x,y) , kgV(x,z)) analog.

$\rightarrow$ Distributivität erfüllt

6.) Neutrale Elemente

x+1=x   und   x+30=30   und   x*30=x   und   x*1=1

Beweis :

kgV(x,1) = x   trivial
kgV(x,30) = 30   , da $x \le 30$ und x | 30
ggT(x,30) = x   , da $x \le 30$ und x | 30
ggT(x,1) =1   trivial
$\rightarrow$ Gesetze der neutralen Elemente erfüllt

7.) Komplement

x*x‘ = 1   und x+x‘ = 30

Beweise :

x*x‘ = 1 kann man einfach zeigen, indem man die 4 verschiedenen Möglichkeiten für $ggT(x, \frac{30}{x})$ aufzählt :

ggT(30,1) = 1
ggT(15,2) = 1
ggT(10,3) = 1
ggT(6,5)   = 1
Wegen der Kommutativität gibt es keine weiteren möglichen verschiedenen Operandenpaare.

x+x‘=30 zeigt man mit der Beziehung kgV(x,y) = x*y / ggT(x,y) :

kgV(x , 30/x) = $\dfrac{x \cdot \frac{30}{x}}{ggT(x,30/x)} = \dfrac{30}{1} = 30$

$\rightarrow$ auch diese Regel ist erfüllt

Somit ist das gegebene Tupel eine boolesche Algebra.
Die Atome sind die Primzahlen 2,3,5 .

9.2 a)

Zuerst zeigen, dass $(x\cdot y)+(x\cdot z)\leq x\cdot(y+z)$ **:**

Es gilt :
$x\cdot y\leq x$ sowie $x\cdot y\leq y\leq y+z$
Mittels der Idempotenz folgt $x\cdot y\leq x\cdot(y+z)$ (*1)
Analog gilt :
$x\cdot z\leq x$ sowie $x\cdot z\leq z\leq y+z$
Mittels der Idempotenz folgt $x\cdot z\leq x\cdot(y+z)$ (*2)
Aus (*1) und (*2) folgt wegen Idempotenz :
$\underline{(x\cdot y)+(x\cdot z)\leq x\cdot(y+z)}$ q.e.d.

Als zweites zeigen, dass $x+(y\cdot z)\leq(x+y)\cdot(x+z)$ **:**
Es gilt $x\leq x+y$ und $x\leq x+z$, woraus folgt : $x\leq(x+y)\cdot(x+z)$ (*3)
Desweiteren gilt $y\cdot z\leq y\leq x+y$ und $y\cdot z\leq z\leq x+z$, woraus folgt : $y\cdot z\leq(x+y)\cdot(x+z)$ (*4)
Aus (*3) und (*4) folgt wegen Idempotenz :
$\underline{x+(y\cdot z)\leq(x+y)\cdot(x+z)}$ q.e.d.

9.2 b)
a,b sind Atome der Menge M.
Nach Definition ist also $a\neq 0$ und für alle $c\in M$ gilt : $a\cdot c=a$ oder $a\cdot c=0$
Ebenso für b : $b\neq 0$ und für alle $c\in M$ gilt : $b\cdot c=b$ oder $b\cdot c=0$

Zeigen, dass $a\cdot b\neq 0\Leftrightarrow a=b$:
$\underline{"\Rightarrow":}$
Nach Definition und Kommutativität gilt $a\cdot b=a$ und $b\cdot a=a\cdot b=b$.
Hieraus folgt unmittelbar $a=b$.
$\underline{"\Leftarrow":}$
Es gilt $a\neq 0$ und $b\neq 0$ sowie $a=b$.
Wegen Idempotenz gilt $a\cdot b=a\cdot a=a\neq 0$.

Q.e.d.

s
9.2 c)
I.) Zeigen, dass für jedes $x\in M$ **gilt :** $x+0=x$, $x+1=1$, $x\cdot 0=0$, $x\cdot 1=x$
$x+0=x$, da $0=x\cdot x'\leq x$
$x+1=1$, da $x\leq 1$
$x\cdot 0=0$, da $0\leq x$
$x\cdot 1=x$, da $x\leq x+x'=1$

II.) Zeigen, dass aus $x\leq y$ **folgt :** $x\cdot y'=0$ **und** $x+y'=1$ **für alle x,y aus M.**
$x\leq y\Leftrightarrow x\cdot y=x$
$\Rightarrow(x\cdot z)\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(z\cdot z)=x\cdot z$
$\Rightarrow x\cdot z\leq y\cdot z$ für alle z aus M
also insbesondere auch für $z=y'$:
$x\cdot y'\leq y\cdot y'$
$\underline{\Rightarrow x\cdot y'=0}$ (da $y\cdot y'=0$) q.e.d.

$x\leq y\Leftrightarrow x+y=y$
$\Rightarrow(x+z)+(y+z)=(x+y)+(z+z)=x+z$

$\Rightarrow y + z \leq x + z$ für <u>alle</u> z aus M

also insbesondere auch für $z = y'$:

$y + y' \leq x + y'$

$\underline{\Rightarrow x + y' = 1}$ (da $y + y' = 1$) q.e.d.

<u>III.) Zeigen, dass Consensus-Regeln gelten :</u>

???

9.3)

Angenommen, es sei möglich eine boolesche Algebra über einer ungeraden Anzahl von Elementen
unter Einsatz beliebiger binärer und unärer Operationen zu konstruieren.

$(M,+,\cdot,',1,0)$ sei eine solche, beliebige Algebra mit den beliebigen binären Operationen $"+"\ und\ "\cdot"$,
der beliebigen unären $Operation\ "\,'\,"$, dem Einselement 1 und dem Nullelement 0.

Die Menge M muss also eine ungerade Anzahl von Elementen enthalten.
Da die Eindeutigkeit des Komplements eines Elements aus M gewährleistet sein muss,
kann die unäre Operation ein Element aus M also nur auf sich selbst abbilden.
D.h. es muss gelten $x = x'$.

Desweiteren müssen aber auch die
<u>Gesetze der 0 und 1 :</u>

$$x + 0 = x$$
$$x + 1 = 1$$
$$x \cdot 1 = x$$
$$x \cdot 0 = 0$$

erfüllt sein, sowie die
<u>Komplement-Regeln :</u>

$$x + x' = 1$$
$$x \cdot x' = 0$$

Wählt man jedoch z.B. $x = 0$, so gilt nach den
Gesetzen der 0 und 1 : $x + 0 = x\ \ d.h.\ \ 0 + 0 = 0$
Komplement-Regeln : $x + x' = 1\ \ d.h.\ \ 0 + 0 = 1$

Da beide Gesetze erfüllt sein müssen, liegt hier ein Widerspruch vor, d.h. die Annahme ist falsch
und es ist nicht möglich eine boolesche Algebra über einer ungeraden Anzahl von Elementen
unter Einsatz beliebiger binärer und unärer Operationen zu konstruieren.