Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Lehrstuhl für Technische Informatik
Prof. Dr. P. Molitor, S. Wefel

Telefon: ☎ 03 45 / 5 52 47 25
E-Mail: wefel@informatik.uni-halle.de

Halle, 18. Dezember 2003

Rechnerarchitektur und Rechnerorganisation (WS 2003/04)

Übungsserie 9

Aufgabe 9.1. (4 Punkte)

Ist $(\{M, \mathsf{kgV}, \mathsf{ggT}, inv, 30, 1)$ mit der Teilmenge der natürlichen Zahlen $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ und den Funktionen kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches), ggT (größter gemeinsamer Teiler) und inv (inversers Element) eine boolesche Algebra, wenn gilt $inv(a) := 30/a$?

Falls ja, geben Sie die Atome an.

Aufgabe 9.2. (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) In einem Verband $(S, +, \cdot)$ gilt die "fast-Distributivität":

$$(x \cdot y) + (x \cdot z) \leq x \cdot (y + z)$$
$$x + (y \cdot z) \leq (x + y) \cdot (x + z)$$

b) Wenn a, b Atome der Menge M sind, dann gilt: $a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a = b$

c) In einer booleschen Algebra $(M, +, \cdot, ^{-}, 1, 0)$ gelten

- die Gesetze der 0 und 1:
  für jedes $x \in M : x + 0 = x$, $x + 1 = 1$, $x \cdot 1 = x$ und $x \cdot 0 = 0$.
- Aus $x \leq y$ folgt $x \cdot \bar{y} = 0$ und $x + \bar{y} = 1$ für alle $x, y \in M$.
- die **Consensus**-Regeln für je drei Elemente x, y und z aus M:

$$\begin{aligned}(x \cdot y) + (\bar{x} \cdot z) + (y \cdot z) &= (x \cdot y) + (\bar{x} \cdot z)\\(x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z) &= (x + y) \cdot (\bar{x} + z)\end{aligned}$$

Aufgabe 9.3. (8 Punkte)

Kann eine boolesche Algebra über einer ungeraden Anzahl von Elementen unter Einsatz beliebiger binärer und unärer Operationen konstruiert werden?

Beweisen Sie ihre Aussage. Geben Sie hierfür entweder ein Beispiel an oder zeigen Sie andernfalls ausführlich, mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Sätze und Lemmas, dass dies nicht möglich ist!