Informatik 3 – Übung 01 – Georg Kuschk

1.1)
Auf die digitale Ebene kann nur interpretiert werden.
Interpretation bedeutet schrittweises Ausführen der Befehle auf der Hardware, hingegen bedeutet die Übersetzung eines in einer Sprache X geschriebenen Programms die Umwandlung in ein äquivalentes Programm der Sprache Y. Die unterste Ebene jedoch wird durch keine Sprache definiert. D.h. der Übergang von der Maschinenspracheebene zur digitalen Ebene kennzeichnet den Übergang von den abstrakten logischen Ebenen zur physikalischen Ebene. Das Programm kann hier nicht weiter übersetzt werden, sondern wird nun tatsächlich Befehl für Befehl interpretiert (abgearbeitet).

1.2 a)
Gesetz von Amdahl :

$$t_n = t_u + \frac{t_b}{a}$$

gegebenes Beispiel :
geg : $t_u = 50s, t_b = 50s, a = 3$
ges : t_n
Lsg : $t_n = 50s + \frac{50s}{3} \approx 66.7s$

1.2 b)
Speedup s :

$$s = \frac{t_v}{t_n} = \frac{t_u + t_b}{t_u + \frac{t_b}{a}} \qquad (t_v = t_u + t_b)$$

gegebenes Beispiel :
geg : $t_u + t_b = 100s, a = 3, s = 2$
ges : t_b

Lsg : $s = 2 = \dfrac{100s}{100s - t_b + \frac{t_b}{3}}$

$$2(100s - \frac{2}{3}t_b) = 100s$$

$$100s = \frac{4}{3}t_b$$

$$\underline{t_b = 75s}$$

1.3 a)

<u>Prozessor 1 : CPI(A)=1 CPI(B)=3 CPI(C)=3</u>

Sequenz X : CPI(X) = 4CPI(A) + 1CPI(B) + 1CPI(C) = 4+3+3 = 10
Sequenz Y : CPI(Y) = 2CPI(A) + 1CPI(B) + 3CPI(C) = 2+3+9 = 14
Sequenz Z : CPI(Z) = 3CPI(A) + 1CPI(B) + 2CPI(C) = 3+3+6 = 12
=>Sequenz X optimal

<u>Prozessor 2 : CPI(A)=2 CPI(B)=1 CPI(C)=2</u>

Sequenz X : CPI(X) = 4CPI(A) + 1CPI(B) + 1CPI(C) = 8+1+2 = 11
Sequenz Y : CPI(Y) = 2CPI(A) + 1CPI(B) + 3CPI(C) = 4+1+6 = 11
Sequenz Z : CPI(Z) = 3CPI(A) + 1CPI(B) + 2CPI(C) = 6+1+4 = 11
=>alle Sequenzen gleichschnell

<u>Prozessor 3 : CPI(A)=2 CPI(B)=2 CPI(C)=1</u>

Sequenz X : CPI(X) = 4CPI(A) + 1CPI(B) + 1CPI(C) = 8+2+1 = 11
Sequenz Y : CPI(Y) = 2CPI(A) + 1CPI(B) + 3CPI(C) = 4+2+3 = 9
Sequenz Z : CPI(Z) = 3CPI(A) + 1CPI(B) + 2CPI(C) = 6+2+2 = 10
=>Sequenz Y optimal

1.3 b)

$$Takte_{ges} = 400 \cdot 10^6 s^{-1} \cdot 3 \cdot 365 Tage \cdot 86400 \frac{s}{Tag} = 4 \cdot 3 \cdot 365 \cdot 864 \cdot 10^{10} = 3.78432 \cdot 10^{16} Takte$$

Bei beiden Prozessoren ist die optimale Sequenz Y (da bei Prozessor 2 egal welche Sequenz).

Berechnung des durchschnittlichen CPI-Wertes für diese Sequenz :

$$\overline{CPI}_{P2}(Y) = \frac{11}{6} \qquad \overline{CPI}_{P3}(Y) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Seien A_Y der Anteil der Sequenz Y am Gesamtprogramm und A_R der Anteil des Restes.
($A_Y + A_R = 1$)

Nun wird der Wert von A_Y ermittelt bei dem Prozessor 3 in den 3 Jahren Nutzungsdauer 5000*100*1Millarde Befehle mehr ausführt als Prozessor 2 (um die 5000 Euro wieder reinzuholen) :

$$\underbrace{\frac{Takte_{ges}}{A_Y \cdot \frac{11}{6} + A_R \cdot 2}}_{Prozessor2} = \underbrace{\frac{Takte_{ges}}{A_Y \cdot \frac{3}{2} + A_R \cdot 2}}_{Prozessor3} - 5 \cdot 10^{14}$$

$$\frac{Takte_{ges}}{A_Y \cdot \frac{11}{6} + (1 - A_Y) \cdot 2} = \frac{Takte_{ges}}{A_Y \cdot \frac{3}{2} + (1 - A_Y) \cdot 2} - 5 \cdot 10^{14}$$

$$\frac{Takte_{ges}}{2 - \frac{1}{6} A_Y} = \frac{Takte_{ges}}{2 - \frac{1}{2} A_Y} - 5 \cdot 10^{14}$$

$$Takte_{ges}(2 - \frac{1}{2} A_Y) = Takte_{ges}(2 - \frac{1}{6} A_Y) - 5 \cdot 10^{14}(2 - \frac{1}{2} A_Y)(2 - \frac{1}{6} A_Y)$$

$$2 - \frac{1}{2} A_Y = 2 - \frac{1}{6} A_Y - \frac{5 \cdot 10^{14}}{Takte_{ges}}(4 - \frac{4}{3} A_Y + \frac{1}{12} A_Y^2)$$

$$-\frac{1}{3}A_Y+\frac{2\cdot 10^{15}}{Takte_{ges}}-\frac{2\cdot 10^{15}}{3\cdot Takte_{ges}}A_Y+\frac{5\cdot 10^{14}}{12\cdot Takte_{ges}}A_Y^2=0$$

$$\frac{5\cdot 10^{14}}{12\cdot Takte_{ges}}A_Y^2+\left(-\frac{2\cdot 10^{15}}{3\cdot Takte_{ges}}-\frac{1}{3}\right)A_Y+\frac{2\cdot 10^{15}}{Takte_{ges}}=0 \qquad |\cdot 3Takte_{ges}$$

$$1.25\cdot 10^{14}A_Y^2+(-2\cdot 10^{15}-Takte_{ges})A_Y+6\cdot 10^{15}=0 \quad |:1.25\cdot 10^{14}$$

$$A_Y^2-3.187456\cdot 10^2+48=0$$

$\rightarrow A_{Y1}\approx 3.186\cdot 10^2$ -entfällt
und $\underline{A_{Y2}\approx 0.15066}$

D.h. der Mindestanteil der gewählten Codesequenz Y am Gesamtprogramm muss ca. 15,067 % betragen um Prozessor 3 dem Prozessor 2 vorzuziehen.
Einem Anteil der Codesequenz Y von 15,067 % führt bei Prozessor 3 zu (Brutto)Mehreinnahmen von ca. 5005,6 Euro gegenüber Prozessor 2.
Subtrahiert man nun noch die 5000 Euro Mehrkosten für die Anschaffung, so betragen die (Netto)Mehreinnahmen ca. 5,6 Euro.
Ein wahrhaft fürstlicher Überschuss in den 3 Jahren.

1.4)

Behauptung :

$$\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1$$

Induktionsanfang :

Für n=0 gilt : $\sum_{i=0}^{0}2^i \overset{?}{=} 2^{0+1}-1$

1 = 1 wahre Aussage

Induktionsvoraussetzung :

Die Behauptung sei für alle Zahlen $\leq n$ bewiesen.

Induktionsschritt :

Die Gültigkeit der Aussage nun für n+1 zeigen :

$$\sum_{i=0}^{n+1}2^i = 2^{n+1}-1+2^{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}2^i = 2(2^{n+1})-1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}2^i = 2^{(n+1)+1}-1$$

q.e.d.