

Lösung:

In dieser Aufgabe sollen die Bedingungen und die Impulsantworten für eine biorthogonale Filterbank hergeleitet werden. Alle Filter sollen symmetrisch sein.

Die Länge des Analyse-Hochpasses soll 9, die des Analyse-Tiefpasses 7 betragen. Damit sind die Koeffizienten $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \tilde{g}_4, g_0, g_1, g_2, g_3$ zu bestimmen.

- Welche Gleichungen können Sie aus den Bedingungen von perfekter Rekonstruktion und Normierung ableiten ?

Aus der Normierung folgt

$$\sum_k \tilde{g}_k = 1$$

Aus der perfekten Rekonstruktion folgt

$$\sum_k \tilde{g}_k g_{2n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $n = 0$ folgt;

$$\begin{aligned} \sum_k \tilde{g}_k g_{-k} &= 1 \\ \sum_{-3}^3 \tilde{g}_k g_{-k} &= 1 \end{aligned}$$

Für $n = 1$ und $n = -1$ folgt

$$\tilde{g}_1 g_3 + \tilde{g}_0 g_2 + \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_2 g_0 + \tilde{g}_3 g_1 + \tilde{g}_4 g_2 = 0$$

Für $n = 2$ und $n = -2$ folgt

$$\tilde{g}_1 g_3 + \tilde{g}_2 g_2 + \tilde{g}_3 g_1 + \tilde{g}_4 g_0 = 0$$

Für $n = 3$ und $n = -3$ folgt

$$\tilde{g}_3 g_3 + \tilde{g}_4 g_2 = 0$$

Falls $|n| \geq 4$ folgt $\tilde{g}_k g_{2n-k} = 0$ für alle k .

- Welche Gleichungen leiten sich aus der Forderung ab, konstante Signale und Signale mit konstantem und quadratischem Anstieg durch den Analyse-Hochpass \tilde{h} zu unterdrücken ?

Sei $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$, dann muß gelten

$$\begin{aligned} &(ax^2 + bx + c)\tilde{h}_0 \\ &+(a(x+1)^2 + b(x+1) + c)\tilde{h}_1 \\ &+(a(x+2)^2 + b(x+2) + c)\tilde{h}_2 \\ &+(a(x+3)^2 + b(x+3) + c)\tilde{h}_3 = 0 \end{aligned}$$

Wir stellen etwas um

$$\begin{aligned} & (ax^2 + bx + c) \left(\sum_k \tilde{h}_k \right) \\ & + b(0\tilde{h}_0 + 1\tilde{h}_1 + 2\tilde{h}_2 + 3\tilde{h}_3) \\ & + 2ax(0\tilde{h}_0 + 1\tilde{h}_1 + 2\tilde{h}_2 + 3\tilde{h}_3) \\ & + 0\tilde{h}_0 + 1\tilde{h}_1 + 4\tilde{h}_2 + 9\tilde{h}_3 = 0 \end{aligned}$$

Als neue Bedingung neben

$$\begin{aligned} \sum_k \tilde{h}_k &= 0 \\ 0\tilde{h}_0 + 1\tilde{h}_1 + 2\tilde{h}_2 + 3\tilde{h}_3 &= 0 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$0\tilde{h}_0 + 1\tilde{h}_1 + 4\tilde{h}_2 + 9\tilde{h}_3 = 0$$

Diese sind wieder auf die entsprechenden Tiefpass-Filter zu übertragen.