

Lösung:

Stellen Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten $\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, g_0, g_1$ anhand der Bedingungen aus der Vorlesung auf.

Verifizieren Sie die in der Vorlesung angegebenen Werte, indem Sie das nichtlineare Gleichungssystem lösen. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg !

(Hinweis: Sie können 7 Gleichungen aus den Bedingungen perf. Rekonstr, Normierung, Absorbierung konstanter Signale und Signale mit konstantem Anstieg für beide Hochpassfilter ableiten)

· Normierung: $\sum_k \tilde{g}_k = 1$

$$\tilde{g}_2 + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 = 1$$

· Filterbedingung:

$$\sum_k \tilde{g}_k g_{2n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $n = 0$ folgt;

$$\tilde{g}_0 g_0 + \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_1 g_1 = 1$$

Für $n = 1$ und $n = -1$ folgt

$$\tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_2 g_0 = 0$$

Falls $|n| \geq 2$ folgt $\tilde{g}_k g_{2n-k} = 0$.

· Hochpassfilter \tilde{h} und h sollen konstante Signale und Signale mit konstantem Anstieg unterdrücken:

Sei $y_i = c$ ein konstantes Signal. Es muss somit gelten, dass

$$c \sum_k \tilde{h}_k = 0$$

also

$$\sum_k \tilde{h}_k = 0$$

und über die Beziehung

$$\tilde{h}_n = -0.5(-1)^n g_{n+1}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} -0.5(-1)^{-2} g_{-1} - 0.5(-1)^{-1} g_0 - 0.5(-1)^0 g_1 &= 0 \\ -0.5 g_1 + 0.5 g_0 - 0.5 g_1 &= 0 \\ -g_1 + g_0 - g_1 &= 0 \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\tilde{g}_2 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 = 0$$

Sei $y_i = ax_i + c$ ein Signal mit konstantem Anstieg. Es muss somit gelten, dass

$$\begin{aligned}\sum_k (a(x+k) + c) \tilde{h}_k &= 0 \\ (ax+c)\tilde{h}_0 + (a(x+1)+c)\tilde{h}_1 + (a(x+2)+c)\tilde{h}_2 &= 0 \\ (ax+c)(\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2) + 0 \cdot a \cdot \tilde{h}_0 + a \cdot \tilde{h}_1 + 2a \cdot \tilde{h}_2 &= 0\end{aligned}$$

Mit der Bedingung dass konstante Signale bereits unterdrückt werden, folgt

$$\begin{aligned}0 \cdot a \cdot \tilde{h}_0 + a \cdot \tilde{h}_1 + 2a \cdot \tilde{h}_2 &= 0 \\ 0 \cdot \tilde{h}_0 + 1 \cdot \tilde{h}_1 + 2 \cdot \tilde{h}_2 &= 0\end{aligned}$$

und über den Zusammenhang zwischen \tilde{h} und g folgt

$$-0 \cdot g_1 + 1 \cdot g_0 + 2 \cdot g_1 = 0$$

In analoger Weise können diese Anforderungen an den Filter h gestellt werden, womit sich 2 Gleichungen für \tilde{g} ergeben:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_2 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 &= 0 \\ 0 \cdot \tilde{g}_2 - 1 \cdot \tilde{g}_1 + 2 \cdot \tilde{g}_0 - 3 \cdot \tilde{g}_1 + 4 \cdot \tilde{g}_2 &= 0\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit 7 Gleichungen:

$$\tilde{g}_0 + 2\tilde{g}_1 + 2\tilde{g}_2 = 1 \quad (1)$$

$$\tilde{g}_0 - 2\tilde{g}_1 + 2\tilde{g}_2 = 0 \quad (2)$$

$$2\tilde{g}_0 - 4\tilde{g}_1 + 4\tilde{g}_2 = 0 \quad (3)$$

$$g_0 - 2 \cdot g_1 = 0 \quad (4)$$

$$g_0 - 2g_1 = 0 \quad (5)$$

$$\tilde{g}_0 g_0 + \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_1 g_1 = 1 \quad (6)$$

$$\tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_2 g_0 = 0 \quad (7)$$

Aus Gleichung (4) folgt $g_0 = 2g_1$. Setzen wir nun (4) in (6) und (7) ein, erhalten wir

$$g_1(2\tilde{g}_0 + 2\tilde{g}_1) = 1 \quad (8)$$

$$g_1(\tilde{g}_1 + 2\tilde{g}_2) = 0 \quad (9)$$

Daraus folgt wiederum

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 + 2\tilde{g}_2 &= 0 \\ \tilde{g}_1 &= -2\tilde{g}_2\end{aligned}$$

Addiere minus ein mal Gleichung (1) auf Gleichung (2)

$$\tilde{g}_1 = 0.25$$

und damit

$$\tilde{g}_2 = -0.125 \quad \text{und} \quad \tilde{g}_0 = 0.75$$

Aus Gleichung (8) folgt schließlich

$$\begin{aligned}g_1 &= 0.5 \quad \text{und} \\g_0 &= 1\end{aligned}$$

Über die Filterbeziehungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{g}_n &= \{-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\} \\ \tilde{h}_n &= \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\} \\ g_n &= \{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \} \\ h_n &= \{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\}\end{aligned}$$