

Lösung:

Sei x ein diskretes Signal (beidseitig beschränkt) und f ein diskreter FIR-Filter.

$X(z)$ und $F(z)$ seien die zugehörigen Funktionen aus der z -Domain.

Zeigen Sie folgende Zusammenhänge durch Verwendung der z -Transformation:

- Vertauschen der Operationen *Filterung* und *Unterabtastung mit Faktor n*

$$- f * (x \downarrow n) = ((f \uparrow n) * x) \downarrow n$$

Die linke Seite entspricht in z -Domain

$$F(z) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X\left(e^{\frac{-i2\pi k}{n}} z^{\frac{1}{n}}\right).$$

Bei der rechten Seite setzen wir $f' = (f \uparrow n) * x$ und erhalten

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F'\left(e^{\frac{-i2\pi k}{n}} z^{\frac{1}{n}}\right).$$

Da $F'(z) = F(z^n)X(z)$ gilt weiter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\left(e^{\frac{-i2\pi k}{n}} z^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) X\left(e^{\frac{-i2\pi k}{n}} z^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(e^{-i2\pi k} z\right) X\left(e^{\frac{-i2\pi k}{n}} z^{\frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

Das kann umgeformt werden zu

$$F(z) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X\left(e^{\frac{-i2\pi k}{n}} z^{\frac{1}{n}}\right)$$

unter Ausnutzung der Eigenschaften der Einheitswurzeln

$$e^{i2\pi} = 1, e^{-i2\pi k} = (e^{i2\pi})^{-k} = 1, \text{ for } k \in \mathbb{Z}.$$

- Vertauschen der Operationen *Filterung* und *Aufwärtsabtastung mit Faktor n*

$$- (f * x) \uparrow n = (f \uparrow n) * (x \uparrow n)$$

In z -Domain erhalten wir beidseitig

$$F(z^n)X(z^n) = F(z^n)X(z^n)$$