

2.)

Die Normierung fordert :

$$\sum_k \tilde{g}_k = 1$$

$$\text{, d.h. } \tilde{g}_2 + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 = 1$$

Die Bedingungen für die perfekte Rekonstruktion sind :

$$\sum_k \tilde{g}_k g_{2n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{, d.h. für } n=0 : \quad \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_0 g_0 + \tilde{g}_1 g_1 = 1$$

$$\text{und für } n=1 : \quad \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_2 g_0 = 0$$

Da konstante Signale absorbiert / unterdrückt werden , gilt noch :

$$\tilde{g}_2 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 = 0 \quad \text{und} \quad -g_1 + g_0 - g_1 = 0$$

Die obigen 5 Gleichungen bilden folgendes Gleichungssystem :

$$\text{I} \quad 2\tilde{g}_2 + 2\tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 = 1$$

$$\text{II} \quad 2\tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_0 g_0 = 1$$

$$\text{III} \quad \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_2 g_0 = 0$$

$$\text{IV} \quad 2\tilde{g}_2 - 2\tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 = 0$$

$$\text{V} \quad g_0 - 2g_1 = 0$$

Die Berechnung von I – IV liefert die Gleichung $4\tilde{g}_1 = 1$ und somit $\tilde{g}_1 = \frac{1}{4}$.

Einsetzen dieses Wertes in obiges Gleichungssystem liefert neues Gleichungssystem:

$$\text{I}' \quad 2\tilde{g}_2 + \tilde{g}_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{II}' \quad \frac{1}{2} g_1 + \tilde{g}_0 g_0 = 1$$

$$\text{III}' \quad \frac{1}{4} g_1 + \tilde{g}_2 g_0 = 0$$

$$\text{IV}' \quad g_0 - 2g_1 = 0$$

Umstellen der Gleichung IV' liefert $g_0 = 2g_1$ und Einsetzen in die Gleichungen II' und III' liefert :

$$\text{II}'' \quad g_1 \left(\frac{1}{2} + 2\tilde{g}_0 \right) = 1$$

$$\text{III}'' \quad g_1 \left(\frac{1}{4} + 2\tilde{g}_2 \right) = 0$$

Hieraus folgt nun , dass $g_1 \neq 0$ und damit nach Gleichung III' , dass $\frac{1}{4} + 2\tilde{g}_2 = 0$, d.h. $\tilde{g}_2 = -\frac{1}{8}$.

Einsetzen in Gleichung I' liefert : $\tilde{g}_0 = \frac{1}{2} - 2(-\frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$.

Womit nach Gleichung II' wiederum folgt : $g_1(\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}) = 1$, d.h. $g_1 = \frac{1}{2}$.

Und nach IV' letztlich $g_0 - 1 = 0$, d.h. $g_0 = 1$.

Die Koeffizienten sind somit alle bestimmt und für die Filter gilt :

$$\{\tilde{g}_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2\} = \left\{-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right\} \quad \text{und}$$

$$\{g_1, g_0, g_1\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$$

Diese Werte sind identisch mit denjenigen aus der Vorlesung.

3.)

Die Normierung fordert :

$$\sum_k \tilde{g}_k = 1$$

$$\text{, d.h. } \tilde{g}_4 + \tilde{g}_3 + \tilde{g}_2 + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 + \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 + \tilde{g}_3 + \tilde{g}_4 = 1$$

*I

Die Bedingungen für die perfekte Rekonstruktion sind :

$$\sum_k \tilde{g}_k g_{2n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{, d.h. für } n=0 : \quad \tilde{g}_3 g_3 + \tilde{g}_2 g_2 + \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_0 g_0 + \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_2 g_2 + \tilde{g}_3 g_3 = 1$$

*II

$$\text{für } n=1 : \quad \tilde{g}_1 g_3 + \tilde{g}_0 g_2 + \tilde{g}_1 g_1 + \tilde{g}_2 g_0 + \tilde{g}_3 g_1 + \tilde{g}_4 g_2 = 0$$

*III

$$\text{für } n=2 : \quad \tilde{g}_1 g_3 + \tilde{g}_2 g_2 + \tilde{g}_3 g_1 + \tilde{g}_4 g_0 = 0$$

*IV

$$\text{für } n=3 : \quad \tilde{g}_3 g_3 + \tilde{g}_4 g_2 = 0$$

*V

(Achtung wegen den plötzlichen Indize-Wechseln – resultiert aus der Benennung der Koeffizienten in der Aufgabenstellung.

formal : g_0, g_1, g_2, \dots - in der Aufgabenstellung jedoch $g_i, g_{i-1}, \dots, g_0, \dots, g_{i-1}, g_i$

bzw. $g_{-i}, g_{-i-1}, \dots, g_0, \dots, g_{i-1}, g_i$)

Da konstante Signale durch den Analyse-Hochpass \tilde{h} absorbiert / unterdrückt werden sollen , gilt noch :

$$\sum_k \tilde{h}_k x_{n-k} = 0 \Rightarrow \sum_k \tilde{h}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^6 -0.5 \cdot (-1)^k g_{k+1} = 0 \Rightarrow \sum_{k=-4}^2 (-1)^{k+1} g_{k+1} = 0$$

$$\text{D.h. } -g_3 + g_2 - g_1 + g_0 - g_1 + g_2 - g_3 = 0 \quad \text{*VI}$$

Sowie

$$\sum_k h_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^8 2 \cdot (-1)^{k-1} \tilde{g}_{k-1} = 0 \Rightarrow \sum_{k=-3}^5 (-1)^{k-1} \tilde{g}_{k-1} = 0$$

$$\text{D.h. } \tilde{g}_4 - \tilde{g}_3 + \tilde{g}_2 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_0 - \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 - \tilde{g}_3 + \tilde{g}_4 = 0 \quad \text{*VII}$$

Da Signale mit konstantem Anstieg durch den Analyse-Hochpass \tilde{h} absorbiert / unterdrückt werden sollen , gilt :

$$\sum_k \tilde{h}_k x_{n-k} = 0 \Rightarrow \sum_k \tilde{h}_k (k \cdot \Delta \cdot x_{start}) = 0 \Rightarrow \sum_k k \cdot \tilde{h}_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^8 k \cdot \tilde{h}_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^8 k \cdot (-0.5 \cdot (-1)^k g_{k+1}) = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ n=-4}}^{n=2, k=8} k \cdot (-1)^{n+1} g_{n+1} = 0$$

$$\text{D.h. } -0 \cdot g_3 + 1 \cdot g_2 - 2 \cdot g_1 + 3 \cdot g_0 - 4 \cdot g_1 + 5 \cdot g_2 - 6 \cdot g_3 = 0 \quad \text{*VIII}$$

Diese Gleichung ist jedoch linear abhängig von Gleichung *VI , also nicht zu gebrauchen.

Sowie

$$\sum_k h_k (k \cdot \Delta \cdot x_{start}) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^8 k \cdot (2 \cdot (-1)^{k-1} \tilde{g}_{k-1}) = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{k=0 \\ n=-3}}^{n=5, k=6} k \cdot (-1)^{n-1} \tilde{g}_{n-1} = 0$$

$$\text{D.h. } 0 \cdot \tilde{g}_4 - 1 \cdot \tilde{g}_3 + 2 \cdot \tilde{g}_2 - 3 \cdot \tilde{g}_1 + 4 \cdot \tilde{g}_0 - 5 \cdot \tilde{g}_1 + 6 \cdot \tilde{g}_2 - 7 \cdot \tilde{g}_3 + 8 \cdot \tilde{g}_4 = 0 \quad \text{*IX}$$

Diese Gleichung ist jedoch linear abhängig von Gleichung *VII , also nicht zu gebrauchen.

....