Analysis 3 – Serie10 – Georg Kuschk

10.1 a)

gegeben : $2y^{(3)} + 3y'' - 8y' + 3y = 0$

$\rightarrow$ Nullstellen der Gleichung $l^3 + \frac{3}{2} l^2 - 4l + \frac{3}{2} = 0$ bestimmen.

$l_1 = 1$ durch Probieren

Mittels Polynomdivision der Gleichung durch $(l - 1)$ und Lösen der daraus folgenden quadratischen Gleichung erhält man $l_2 = \frac{1}{2}$ und $l_3 = -3$.

Aus den Nullstellen folgt nun

$y_1(x) = C_1 e^x$, $y_2(x) = C_2 e^{\frac{1}{2}x}$ und $y_3(x) = C_3 e^{-3x}$. $C_1, C_2, C_3 \in R$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung lautet also

$\underline{y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + C_3 e^{-3x}}$ $\quad ,C_1, C_2, C_3 \in R$

10.1 b)

gegeben : $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

$\rightarrow$ Nullstellen der Gleichung $l^4 + 2l^2 + 1 = 0$ bestimmen.

$l^4 + 2l^2 + 1 = (l^2 + 1)^2 = (l + i)^2 (l - i)^2$

$\rightarrow l_{1,2} = i$, $l_{3,4} = -i$

Aus den Nullstellen folgen nun die komplexen Lösungen

$y_1 = C_1 e^{ix}$, $y_2 = C_2 x e^{ix}$, $y_3 = C_3 e^{-ix}$, $y_4 = C_4 x e^{-ix}$

Die komplexe Lösung der gegebenen Differentialgleichung lautet also

$y(x) = C_1 e^{ix} + C_2 x e^{ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix}$

Die relle Lösung folgt durch Aufspaltung in Realteil und Imaginärteil :

$$
\begin{aligned}
& y(x) \\
&= C_1 e^{ix} + C_2 x e^{ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix} \\
&= C_1 \cos x + C_1 i \sin x + C_2 x \cos x + C_2 x i \sin x + C_3 \cos(-x) + C_3 i \sin(-x) + C_4 x \cos(-x) + C_4 x i \sin(-x) \\
&= C_1 \cos x + C_1 i \sin x + C_2 x \cos x + C_2 x i \sin x + C_3 \cos x - C_3 i \sin x + C_4 x \cos x - C_4 x i \sin x
\end{aligned}
$$

$\rightarrow \operatorname{Re}(y) = (C_1 + C_3) \cos x - (C_2 + C_4) x \cos x$

$\rightarrow \operatorname{Im}(y) = (C_1 - C_3) \sin x + (C_2 - C_4) x \sin x$

$\underline{\rightarrow y(x) = (C_1 + C_3) \cos x - (C_2 + C_4) x \cos x + (C_1 - C_3) \sin x + (C_2 - C_4) x \sin x}$ $\quad ,C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$

10.1 c)

gegeben : $y''-2y'+y-\frac{e^x}{\sqrt{x}}=0$

Zunächst Lösen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung :

$\rightarrow l^2-2l+1=0$

$\rightarrow l_{1,2}=1\pm\sqrt{0}=1$

$\rightarrow y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=xe^x$

$\rightarrow$ allgemeine Lösung der homogenen DGL : $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x$

Die inhomogene Differentialgleichung nun durch Variation der Konstanten lösen :

$y(x)=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$

$y'(x)=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)$

Bestimmen von $C_1'(x)$ und $C_2'(x)$ wie in Vorlesung :

Es gilt

$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$

und

$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}}$

Das heißt ,

$C_1'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=0 \quad \Rightarrow C_1'(x)+C_2'(x)x=0$

und

$C_1'(x)e^x+(x+1)\cdot C_2'(x)e^x=\frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow C_1'(x)+(x+1)\cdot C_2'(x)=x^{-\frac{1}{2}}$

Stellt man die erste Gleichung nach $C_1'(x)$ um und setzt sie in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$C_2'(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ und somit $\underline{C_2(x)=2\sqrt{x}}$.

Für $C_1(x)$ folgt dann

$C_1'(x)=-C_2'(x)x=-x^{-\frac{1}{2}}\cdot x=-x^{\frac{1}{2}}$ und somit $\underline{C_1(x)=-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$.

$\rightarrow$ spezielle Lösung der inhomogenen DGL : $y(x)=\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}e^x=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}e^x$

$\rightarrow$ allgemeine Lösung der inhomogenen DGL : $\underline{y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}e^x}$. $\qquad C_1,C_2\in R$

10.2)

gegeben : $g : R \to R$, $g(-y) = -g(y)$ und $\forall y, \bar{y} \in R \ |g(y) - g(\bar{y})| \leq L \cdot |y - \bar{y}|$

10.2 a)

Es sei $y''(x) = -g(y)$.

<u>I.)</u> Zeigen, dass $u(x) = y(c + x)$ Lösung der Gleichung ist :

$$u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{dy(c+x)}{dx} = \frac{dy(c+x)}{d(c+x)} \cdot \frac{d(cx+c)}{dx} = \frac{dy(c+x)}{dx} = y'(z) \qquad \text{mit } z \coloneqq c + x$$

$\to u''(x) = y''(z) = -g(y(z))$

$\to y''(c+x) = -g(y(c+x))$

<u>II.)</u> Zeigen, dass $v(x) = y(c - x)$ Lösung der Gleichung ist :

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{dy(c-x)}{dx} = \frac{dy(c-x)}{d(c-x)} \cdot \frac{d(c-x)}{dx} = \frac{dy(c-x)}{dx} = -y'(z) \qquad \text{mit } z \coloneqq c - x$$

$\to v''(x) = y''(z) = -g(y(z))$

$\to y''(c-x) = -g(y(c-x))$

<u>III.)</u> Zeigen, dass $w(x) = -y(x)$ Lösung der Gleichung ist :

$$w'(x) = \frac{dw(x)}{dx} = -\frac{dy(x)}{x} = -y'(x)$$

$$\to w''(x) = \frac{dw'(x)}{dx} = -\frac{dy'(x)}{dx} = -y''(x) = g(y(x)) = g(-w(x))$$

$\to w''(x) = -g(w(x))$

10.3)

gegeben : $y''(x) + y(x) = \cos(wx)$

Wieder zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung lösen :

$\to l^2 + 1 = 0$

$\to l_1 = i$, $l_2 = -i$

$\to y_1(x) = e^{ix} = C_1(\cos x + i \sin x)$

und $y_2(x) = e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = C_2(\cos x - i \sin x)$

Die komplexe Lösung lautet also

$$y(x) = (C_1 + C_2)\cos x + (C_1 - C_2) i \sin x = C_1 \cos x + C_2 i \sin x$$

Für die reellen Lösungen folgt dann durch Aufspaltung in Realteil und Imaginärteil :

$y_1(x) = \operatorname{Re}(y) = C_1 \cos x$ und $y_2(x) = \operatorname{Im}(y) = C_2 \sin x$

$\to$ allgemeine Lösung der homogenen DGL :

$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

zu 10.3)

Die inhomogene Differentialgleichung nun durch Variation der Konstanten lösen :

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)$$

Bestimmen von $C_1'(x)$ und $C_2'(x)$ wie in Vorlesung :

Es gilt

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

und

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = \cos(wx)$$

Das heißt ,

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \qquad (*1)$$

$$\rightarrow C_1'(x)\cos x \sin x + C_2'(x)\sin^2 x = 0 \qquad (*2)$$

und

$$-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \cos(wx) \quad \rightarrow -C_1'(x)\sin x\cos x + C_2'(x)\cos^2 x = \cos(wx)\cdot\cos x \qquad (*3)$$

Addition von (*2) und (*3) liefert :

$$C_2'(x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \cos(wx)\cos x$$

$$\rightarrow C_2'(x) = \cos(wx)\cos x$$

$$\rightarrow C_2(x) = \frac{\sin(x(w-1))}{2(w-1)} + \frac{\sin(x(w+1))}{2(w+1)}$$

Wegen (*1) gilt :

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x} = -\sin x\cdot\cos(wx)$$

$$\rightarrow C_1(x) = \frac{\cos(x(w+1))}{2(w+1)} - \frac{\cos(x(w-1))}{2(w-1)}$$

Somit ist $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$ beschränkt, falls $w \neq \pm 1$:

Für $w = 1$ ist :

$$C_2'(x) = \cos^2 x \qquad \rightarrow C_2(x) = \frac{1}{2}\left(\sin x\cos x + x\right)$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x} = -\sin x\cos x \qquad \rightarrow C_1(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$\rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 x\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\cos x + \frac{1}{2}x\sin x$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{1}{2}x\sin$$

Für $x \rightarrow \infty$ ist dieser Term unbeschränkt, d.h. Resonanz tritt ein.

Für $w = -1$ folgt wegen $\cos(-x) = \cos x$ genau dasselbe , d.h. ebenfalls unbeschränkt.