Analysis 3 – Serie09 – Georg Kuschk

9.1)
???

9.2 a)

Lösen des DGL $Y' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot Y$

Zunächst die Eigenwerte durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - lE) = 0$ bestimmen :

$$\det(A - lE) = \det\begin{pmatrix} 3-l & -1 & -3 \\ -6 & 2-l & 6 \\ 6 & -2 & -6-l \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der 1. Spalte :

$$= (3-l)\cdot\det\begin{pmatrix} 2-l & 6 \\ -2 & -6-l \end{pmatrix} - (-6)\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -6-l \end{pmatrix} + 6\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2-l & 6 \end{pmatrix}$$

$$= (3-l)\cdot(-12 - 2l + 6l + l^2 + 12) + 6\cdot(6 + l - 6) + 6\cdot(-6 + 6 - 3l)$$

$$= (3-l)\cdot(l^2 + 4l) + 6l - 18l$$

$$= 3l^2 + 12l - l^3 - 4l^2 - 12l$$

$$= -l^3 - l^2$$

Die Eigenwerte werden nun durch $-l^3 - l^2 = 0$ bestimmt.
D.h. $l_1 = 0 \quad , \quad l_2 = 0 \quad , \quad l_3 = -1$

<u>Lösungen des Systems zum doppelten Eigenwert</u> $l_{1,2} = 0$:
Da Vielfachheit des Eigenwertes zwei ist, lautet der Ansatz :

$$y_{1,2} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} x\right) \cdot e^{lx} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix} \qquad \rightarrow (y_{1,2})' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in das DGL-System liefert :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 + 3b_1 x - a_2 - b_2 x - 3a_3 - 3b_3 x \\ -6a_1 - 6b_1 x + 2a_2 + 2b_2 x + 6a_3 + 6b_3 x \\ 6a_1 + 6b_1 x - 2a_2 - 2b_2 x - 6a_3 - 6b_3 x \end{pmatrix} \qquad (*1)$$

Um eine Aussage über die b_i zu erhalten, das obige lineare Gleichungssystem nach x differenzieren,

$$0 = 3b_1 - b_2 - 3b_3$$

$$0 = -6b_1 + 2b_2 + 6b_3$$

$$0 = 6b_1 - 2b_2 - 6b_3$$

und nach dem Gaußschen Verfahren lösen :

zu 9.2 a)

$$\begin{array}{ccc|c} b_1 & b_2 & b_3 & \\ \hline 3 & -1 & -3 & 0 \\ -6 & 2 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & -6 & 0 \\ \hline 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow b_2, b_3 \in R$ beliebig

und $3b_1 = b_2 + 3b_3$

$$b_1 = \frac{1}{3}b_2 + b_3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}d_1 + d_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad , d_{1,2} \in R$$

Dies in (*1) einsetzen :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}d_1 + d_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 + d_1x + 3d_2x - a_2 - d_1x - 3a_3 - 3d_2x \\ -6a_1 - 2d_1x - 6d_2x + 2a_2 + 2d_1x + 6a_3 + 6d_2x \\ 6a_1 + 2d_1x + 6d_2x - 2a_2 - 2d_1x - 6a_3 - 6d_2x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}d_1 + d_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 - a_2 - 3a_3 \\ -6a_1 + 2a_2 + 6a_3 \\ 6a_1 - 2a_2 - 6a_3 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS wieder lösen :

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline 3 & -1 & -3 & \frac{1}{3}d_1 + d_2 \\ -6 & 2 & 6 & d_1 \\ 6 & -2 & -6 & d_2 \\ \hline 3 & -1 & -3 & \frac{1}{3}d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}d_1 + 2d_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}d_1 - d_2 \end{array}$$

$$\rightarrow d_1 = 0 \quad , \quad d_2 = 0$$

d.h. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu 9.2 a)

$\rightarrow 3a_1 = a_2 + 3a_3$

$\rightarrow a_2, a_3 \in R$ beliebig

und $a_1 = \frac{1}{3} a_2 + a_3$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad , c_{1,2} \in R$$

$$\rightarrow y_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad und \quad y_2 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , c_{1,2} \in R$$

sind Fundamentallösungen zu $l_{1,2} = 0$

<u>Lösungen des Systems zum Eigenwert</u> $l_3 = -1$:

Da Vielfachheit des Eigenwertes eins ist, lautet der Ansatz :

$$y_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{lx} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \qquad \rightarrow (y_3)' = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

Einsetzen in das DGL-System :

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

(durch e^{-x} dividieren und Produkt bilden)

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 - a_2 - 3a_3 \\ -6a_1 + 2a_2 + 6a_3 \\ 6a_1 - 2a_2 - 6a_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1 - a_2 - 3a_3 \\ -6a_1 + 3a_2 + 6a_3 \\ 6a_1 - 2a_2 - 5a_3 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS lösen :

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline 4 & -1 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & -5 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$\rightarrow a_2 = -a_3$

und $2a_1 = -\frac{1}{2} a_2 - \frac{3}{2} a_3$

zu 9.2 a)

d.h. $a_1 = -\frac{1}{2} a_2$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = c_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad , c_3 \in R$$

$$\rightarrow y_3 = c_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

Die Lösungen y_1, y_2, y_3 bilden zusammen ein Fundamentalsystem, da die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{c_1}{3} & c_2 & \frac{1}{2} c_3 \cdot e^{-x} \\ c_1 & 0 & -c_3 \cdot e^{-x} \\ 0 & c_2 & c_3 \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$$

ungleich 0 ist für alle x.

Die allgemeine Lösung lautet somit :

$$\underline{y(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}}$$

9.2 b)

Lösen des DGL $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot Y$

Zunächst die Eigenwerte durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - lE) = 0$ bestimmen :

$$\det(A - lE) = \det\begin{pmatrix} 1-l & 0 & -1 \\ -6 & 2-l & 6 \\ 4 & -1 & -4-l \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der 2. Spalte :

$$= (2-l)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-l & -1 \\ 4 & -4-l \end{pmatrix} - (-1)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-l & -1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= (2-l)\cdot(-4 - l + 4l + l^2 + 4) + (6 - 6l - 6)$$

$$= (2-l)\cdot(l^2 + 3l) - 6l$$

$$= 2l^2 + 6l - l^3 - 3l^2 - 6l$$

$$= -l^3 - l^2$$

Die Eigenwerte werden nun durch $-l^3 - l^2 = 0$ bestimmt.

D.h. $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = -1$

<u>Lösungen des Systems zum doppelten Eigenwert</u> $l_{1,2} = 0$:

Da Vielfachheit des Eigenwertes zwei ist, lautet der Ansatz :

$$y_{1,2} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} x\right) \cdot e^{lx} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix} \qquad (*2)$$

$$\rightarrow (y_{1,2})' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in das DGL-System liefert :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x \\ a_2 + b_2 x \\ a_3 + b_3 x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x - a_3 - b_3 x \\ -6a_1 - 6b_1 x + 2a_2 + 2b_2 x + 6a_3 + 6b_3 x \\ 4a_1 + 4b_1 x - a_2 - b_2 x - 4a_3 - 4b_3 x \end{pmatrix} \qquad (*3)$$

Um eine Aussage über die b_i zu erhalten, das obige lineare Gleichungssystem nach x differenzieren,

$$0 = b_1 - b_3$$

$$0 = -6b_1 + 2b_2 + 6b_3$$

$$0 = 4b_1 - b_2 - 4b_3$$

und nach dem Gaußschen Verfahren lösen :

zu 9.2 b)

$$\begin{array}{ccc|c} b_1 & b_2 & b_3 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow b_2 = 0$ und $b_1 = b_3$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , c_1 \in R$$

Dies in (*3) einsetzen :

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 x - a_3 - c_1 x \\ -6a_1 - 6c_1 x + 2a_2 + 6a_3 + 6c_1 x \\ 4a_1 + 4c_1 x - a_2 - 4a_3 - 4c_1 x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ -6a_1 + 2a_2 + 6a_3 \\ 4a_1 - a_2 - 4a_3 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS wieder lösen :

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ \hline \end{array}$$

$\rightarrow$

$a_1 = a_3 + 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = a_1 - 1$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , c_{1,2} \in R$$

Nach (*2) sind die Fundamentallösungen zu $l_{1,2} = 0$ somit

$$y_{1,2} = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x$$

$$\rightarrow y_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2+x \\ 3 \\ 1+x \end{pmatrix} \quad und \quad y_2 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad , c_{1,2} \in R$$

<u>Lösungen des Systems zum Eigenwert</u> $l_3 = -1$:

Da Vielfachheit des Eigenwertes eins ist, lautet der Ansatz :

$$y_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{lx} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \qquad \rightarrow (y_3)' = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

Einsetzen in das DGL-System :

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

(durch e^{-x} dividieren und Produkt bilden)

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ -6a_1 + 2a_2 + 6a_3 \\ 4a_1 - a_2 - 4a_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 - a_3 \\ -6a_1 + 3a_2 + 6a_3 \\ 4a_1 - a_2 - 3a_3 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS lösen :

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \hline 2 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow$

$a_2 = -a_3$ und

$2a_1 = a_3$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad , c_3 \in R$$

$$\rightarrow y_3 = c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

Die Lösungen y_1, y_2, y_3 bilden zusammen ein Fundamentalsystem, da die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} c_1(2+x) & c_2 & c_3 \cdot e^{-x} \\ 3c_1 & 0 & -2c_3 \cdot e^{-x} \\ c_1(1+x) & c_2 & 2c_3 \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$$

ungleich 0 ist für alle x.

zu 9.2 b)

Die allgemeine Lösung lautet somit :

$$y(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2+x \\ 3 \\ 1+x \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

9.2 c)

Lösen des DGL $Y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot Y$

Zunächst die Eigenwerte durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - lE) = 0$ bestimmen :

$$\det(A - lE) = \det\begin{pmatrix} 1-l & -2 \\ 6 & -5-l \end{pmatrix}$$

$$= -5 - l + 5l + l^2 + 12$$

$$= l^2 + 4l + 7$$

$$\rightarrow l_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-7}$$

$$\underline{l_1 = -2 + i\sqrt{3}}$$

$$\underline{l_2 = -2 - i\sqrt{3}}$$

Lösungen des Systems zum Eigenwert $l_1 = -2 + i\sqrt{3}$:

Da Vielfachheit des Eigenwertes eins ist, lautet der Ansatz :

$$y_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{lx} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x + i\sqrt{3}x} \qquad \rightarrow (y_1)' = \left(-2 + i\sqrt{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x + i\sqrt{3}x}$$

Einsetzen in das DGL-System :

$$\left(-2 + i\sqrt{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x + i\sqrt{3}x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x + i\sqrt{3}x}$$

(durch $e^{-2x + i\sqrt{3}x}$ dividieren und Produkt bilden)

$$\begin{pmatrix} -2a_1 + i\sqrt{3} \cdot a_1 \\ -2a_2 + i\sqrt{3} \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ 6a_1 - 5a_2 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile

$$-2a_1 + i\sqrt{3} \cdot a_1 = a_1 - 2a_2$$

folgt :

$$\left(-2 + i\sqrt{3} - 1\right) \cdot a_1 = -2a_2$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} a_1$$

zu 9.2 c)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad , \; c_1 \in R$$

$$\rightarrow y_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot e^{-2x+i\sqrt{3}x}$$

Lösungen des Systems zum Eigenwert $l_1 = -2 - i\sqrt{3}$:

Da Vielfachheit des Eigenwertes eins ist, lautet der Ansatz :

$$y_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{lx} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x-i\sqrt{3}x} \qquad \rightarrow (y_1)' = \left(-2 - i\sqrt{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x-i\sqrt{3}x}$$

Einsetzen in das DGL-System :

$$\left(-2 - i\sqrt{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x-i\sqrt{3}x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x-i\sqrt{3}x}$$ (durch $e^{-2x-i\sqrt{3}x}$ dividieren und Produkt bilden)

$$\begin{pmatrix} -2a_1 - i\sqrt{3} \cdot a_1 \\ -2a_2 - i\sqrt{3} \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ 6a_1 - 5a_2 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile

$$-2a_1 - i\sqrt{3} \cdot a_1 = a_1 - 2a_2$$

folgt :

$$\left(-2 - i\sqrt{3} - 1\right) \cdot a_1 = -2a_2$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} a_1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad , \; c_2 \in R$$

$$\rightarrow y_2 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot e^{-2x-i\sqrt{3}x}$$

Die komplexen Lösungen in reelle Lösungen mittels der Beziehung $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ umwandeln :

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{Re}(y_1) = \mathrm{Re}\left(c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot e^{-2x+i\sqrt{3}x} \right) = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \mathrm{Re}\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{3}x} \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \cdot e^{i\sqrt{3}x} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y}_1 = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \mathrm{Re}\begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{3}x\right) + i\sin\left(\sqrt{3}x\right) \\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\cos\left(\sqrt{3}x\right) + i\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y}_1 = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{3}x\right) \\ \frac{3}{2}\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\sqrt{3}x\right) \end{pmatrix}$$

und

zu 9.2 c)

$$\tilde{y}_2 = \mathrm{Im}(y_2) = \mathrm{Im}\left(c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot e^{-2x-i\sqrt{3}x}\right) = c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \mathrm{Im}\begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}x} \\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-i\sqrt{3}x} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y}_2 = c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \cos\left(-\sqrt{3}x\right) + i\sin\left(-\sqrt{3}x\right) \\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\cos\left(-\sqrt{3}x\right) + i\sin\left(-\sqrt{3}x\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y}_2 = c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \begin{pmatrix} \sin\left(-\sqrt{3}x\right) \\ \frac{3}{2}\sin\left(-\sqrt{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\sqrt{3}x\right) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ bilden zusammen ein Fundamentalsystem, da die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos\left(\sqrt{3}x\right) & c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin\left(-\sqrt{3}x\right) \\ c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \left(\frac{3}{2}\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right) & c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \left(\frac{3}{2}\sin\left(-\sqrt{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\sqrt{3}x\right)\right) \end{pmatrix}$$

ungleich 0 ist für alle x.

Die allgemeine Lösung lautet somit :

$$\underline{y(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{3}x\right) \\ \frac{3}{2}\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\sqrt{3}x\right) \end{pmatrix} \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin\left(-\sqrt{3}x\right) \\ \frac{3}{2}\sin\left(-\sqrt{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(-\sqrt{3}x\right) \end{pmatrix} \cdot e^{-2x}}$$

9.3)

Nach Aufgabenstellung sei das Salz in den Tanks stets gleichmäßig verteilt.

$m_i(t)$ bezeichne den Salgehalt im Tank i zur Zeit t in Kilo.

Außerdem gilt $m_1(0) = 50$ und $m_2(0) = 20$

Die Funktionen m_i erfüllen das DGL-System

$$\begin{pmatrix} \frac{m_1}{dt} \\ \frac{m_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{80}{1000}m_1 + \frac{20}{1000}m_2 \\ \frac{80}{1000}m_1 - \frac{80}{1000}m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{25} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte der konstanten Koeffizientenmatrix A bestimmen :

$$\det(A - l E) = \frac{1}{50}\det\begin{pmatrix} -4-l & 1 \\ 4 & -4-l \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{50}\left(16 + 8l + l^2 - 4\right) = 0$$

zu 9.3)

$$\rightarrow l_{1,2} = \frac{1}{50}\left(-4 \pm \sqrt{16-12}\right)$$

$$l_1 = -\frac{2}{50} = -\frac{1}{25}$$

$$l_2 = -\frac{6}{50} = -\frac{3}{25}$$

zugehörige Eigenvektoren v_i über die Beziehung $(A - l_i E)\cdot v_i = 0$ bestimmen :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{25} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{1}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \qquad \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0 \qquad \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen sind somit

$$\vec{m}_1(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{lt} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{t}{25}} \quad \text{und}$$

$$\vec{m}_2(t) = C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{lt} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{3t}{25}}$$

Die Lösungen $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ bilden zusammen ein Fundamentalsystem, da die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} C_1 \cdot e^{-\frac{t}{25}} & C_2 \cdot e^{-\frac{3t}{25}} \\ C_1 \cdot 2e^{-\frac{t}{25}} & -C_2 \cdot 2e^{-\frac{3t}{25}} \end{pmatrix}$$

ungleich 0 ist für alle t.

Die allgemeine Lösung lautet somit :

$$\vec{m}(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{t}{25}} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{3t}{25}} \qquad , C_1, C_2 \in R$$

Die Anfangsbedingungen liefern die Konstanten :

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ 2C_1 - 2C_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow C_1 = 50 - C_2$$

$$\rightarrow 20 = 100 - 2C_2 - 2C_2$$

d.h. $\underline{C_2 = 20}$ und somit $\underline{C_1 = 30}$.

zu 9.3)
Somit läßt sich der Salzgehalt in den Tanks bestimmen durch :

$$\begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{t}{25}} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{-\frac{3t}{25}}$$

Die Salzgehalte

$$m_1(t) = 30 \cdot e^{-\frac{t}{25}} + 20 \cdot e^{-\frac{3t}{25}} \quad \text{und}$$

$$m_2(t) = 60 \cdot e^{-\frac{t}{25}} - 40 \cdot e^{-\frac{3t}{25}}$$

streben für $t \longrightarrow \infty$ natürlich gegen Null.

9.4)
???