Analysis 3 – Serie08 – Georg Kuschk

8.1)
Das Anfangswertproblem besitzt nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung, wenn gilt :
$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$, f stetig , $L > 0$, $\forall (x,y_1),(x,y_2) \in$ kompaktes Rechteck $\subseteq R^2$

Eindeutigkeit der Lösung zeigen :
$f(x,y) = \sin(xy)$
Betrachte f als Funktion von y , d.h.
$f = f(\bar{x}, y)$ mit $\bar{x} \in [-a,a]$ ($\bar{x}$ beliebig aber fest) , $a \in R^+$ $(a > 0)$
Dann ist $f' = \dfrac{df}{dy} = \bar{x} \cdot \cos(\bar{x}y) \Rightarrow |f'| = |\bar{x} \cdot \cos(\bar{x}y)| \le a$
Setze $L := a$
Desweiteren gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung
$$\frac{f(\bar{x},y_1) - f(\bar{x},y_2)}{y_1 - y_2} = f'(\bar{x},y_3) \qquad \forall y_1,y_2 \in R \,(o.B.d.A. \quad y_1 < y_2) \;, \quad y_3 \in (y_1,y_2)$$
D.h. $\dfrac{|f(\bar{x},y_1) - f(\bar{x},y_2)|}{|y_1 - y_2|} = |f'(\bar{x},y_3)| \le L$
$$\Rightarrow |f(\bar{x},y_1) - f(\bar{x},y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$$
Das Anfangswertproblem ist somit in $[-a,a]$ eindeutig lösbar. Q.e.d.

2. Teil :
$y'(x) = \sin(xy) \qquad \Rightarrow |y'(x)| = |\sin(xy)| \le 1 \qquad \forall x,y \in R$
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt für $x \in R \setminus \{0\}$:
$$\frac{|y(x) - y(0)|}{|x - 0|} = |y'(x)| \le 1 \quad | \cdot |x|$$
$$|y(x) - y(0)| = |y'(x)| \cdot |x| \le |x|$$
$$\Rightarrow |y(x) - 1| \le |x| \qquad \forall x \in R$$ Q.e.d.

8.2 a)

- $f(x,y)$ ist in R^2 stetig, da sie in den einzelnen Teilbereichen stetig ist und die Definitionen an den gemeinsamen Rändern übereinstimmen.

- $f(x,y)$ ist in keiner Umgebung des Nullpunktes Lipschitz-stetig bezüglich y.
  Beweis :
  Sei U eine beliebige Umgebung des Nullpunktes und L>0 beliebig.
  Dann existieren Punkte (x,y_1) und (x,y_2) in U mit $x \ne 0$, $y_1 < 0$, $y_2 > x^2$
  und $y_2 - y_1 < \dfrac{4|x|}{L}$.
  Für diese Punkte gilt
  $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = 4|x| > L|y_1 - y_2|$

8.2 b)

Das Anfangswertproblem $y' = f(x,y)$, $y(0)=0$ ist eindeutig lösbar.

<u>Beweis :</u>

Zunächst die Differentialgleichung in den einzelnen Teilbereichen lösen :

- I.) $\underline{y<0}$:

  $y' = 2x$

  Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar :

  $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \int dy = 2\int x dx + C \Rightarrow y = x^2 + C$ d.h. $y_1 = x^2 + C$

- II.) $\underline{0<y<x^2}$:

  $y' = 2x - \frac{4}{x}y$ (*1)

  Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar :

  Inhomogene DGL der Art $y' = g(x)\cdot y + h(x)$ $\quad mit\ g(x) = -\frac{4}{x}\ und\ h(x) = 2x$

  Zuerst die zugehörige homogene lineare DGL lösen $(d.h.\quad h(x) \equiv 0)$:

  $y' = -\frac{4}{x}y$

  $\Rightarrow \frac{dy}{y} = -4\frac{1}{x}dx$

  $\Rightarrow \ln|y| = -4\ln|x| + C$

  $\Rightarrow \ln y = \ln|x|^{-4} + C$ $\quad |y|$ überflüssig, da $0<y$

  $\Rightarrow y = x^{-4}\cdot e^C = C\cdot x^{-4}$ $\quad |x^{-4}|$ überflüssig, da $0<y$ und $0<e^C$

  Nun die inhomogene DGL lösen :
  Ansatz :

  Variation der Konstanten - Statt der Konstanten C setzt man die zu bestimmende unbekannte Funktion $C(x)$.

  D.h. $y = C(x)\cdot x^{-4}$ (*2)

  $\Rightarrow y' = C'(x)\cdot x^{-4} - 4x^{-5}\cdot C(x)$ (*3)

  Einsetzen von (*2) und (*3) in (*1) liefert :

  $C'(x)\cdot x^{-4} - 4x^{-5}\cdot C(x) = 2x - \frac{4}{x}C(x)\cdot x^{-4}$

  $\Rightarrow C'(x) - 4x^{-1}\cdot C(x) = 2x^5 - \frac{4}{x}C(x)$

  $\Rightarrow C'(x) = 2x^5$

  $\Rightarrow C(x) = \int_0^x 2t^5 dt + C = \frac{1}{3}x^6 + C$

  Einsetzen in (*2) liefert :

  $y = \left(\frac{1}{3}x^6 + C\right)\cdot x^{-4}$

  $\Rightarrow$ Lösung der DGL : $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x^4}$

  d.h. $y_2 = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x^4}$

- III.) $\underline{y \ge x^2}$:

  $y' = -2x$

  Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar :

  $y_3 = -x^2 + C$

zu 8.2 b)
Da für I.) und II.) die Lösungen nicht im vorgegebenen Definitionsbereich liegen,
I.) ist $y_1 = x^2 + C$ statt $y < 0$
II.) ist $y_3 = -x^2 + C$ statt $y \geq x^2$

ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems für $y(0) = 0$, $\quad y = \frac{x^2}{3}$.

(Nur für $C = 0$ läuft die Lösungskurve durch den Nullpunkt.)

8.2 c)
Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf zur Berechnung einer Lösung eines AWP :
$y(x_0) = y_0$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \qquad , n=0,1,2,..$$

Für $y_0 = y(0) = 0$ liefert das Iterationsverfahren

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x f(t,0)dt = \int_0^x 2t - \frac{4 \cdot 0}{t} dt = \int_0^x 2tdt = x^2$$

$$y_2(x) = \int_0^x f(t,t^2)dt = \int_0^x -2tdt = -x^2$$

$$y_3(x) = \int_0^x f(t,-t^2)dt = \int_0^x 2tdt = x^2$$

...... usw.
$\Rightarrow$ Iterationsverfahren konvergiert **nicht**, da in jedem Schritt ein Vorzeichenwechsel stattfindet.

8.3 a)
Lösen der DGL $y' = x^4 y + x^4 y^4$
$\longrightarrow$ Bernoullische Differentialgleichung

$$\frac{y'}{y^4} = \frac{x^4}{y^3} + x^4 \qquad \text{nach Division durch } y^4 \qquad \text{- (für } y \neq 0 \text{)}$$

Substitution $z := y^{-3}$

$$\Rightarrow z' = \frac{-3}{y^4} y'$$

d.h. $\frac{y'}{y^4} = -\frac{1}{3} z'$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} z' = x^4 z + x^4$$

$$\Rightarrow z' = -3x^4 (z+1)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -3x^4 (z+1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{z+1} dz = -3 \int x^4 dx + C$$

zu 8.3 a)

$$\Rightarrow \ln|z+1| = -\frac{3}{5}x^5 + C$$

$$\Rightarrow |z+1| = e^{-\frac{3}{5}x^5 + C}$$

$$\Rightarrow |z+1| = e^{-\frac{3}{5}x^5} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow z+1 = e^{-\frac{3}{5}x^5} \cdot C$$ Betrag fällt weg, da C beliebige Konstante ist

$$\Rightarrow \frac{1}{y^3} = C \cdot e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1$$

$$\Rightarrow \underline{y = \sqrt[3]{\frac{1}{C \cdot e^{-\frac{3}{5}x^5} - 1}}}$$

8.3 b)

Lösen der DGL $y' = y^2 + 1 - x^2$ (*4)

$\longrightarrow$ Riccatische Differentialgleichung

Erraten einer speziellen Lösung :

$y = x$, denn $dy = dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = 1 \quad \Rightarrow 1 = x^2 + 1 - x^2$ wahre Aussage

$\Rightarrow$ Substitution : $y = x + \frac{1}{u}$ u ist neue, unabhängige Variable

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{u^2}u'$$

Einsetzen in (*4) :

$$1 - \frac{1}{u^2}u' = \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 + 1 - x^2$$

$$-\frac{1}{u^2}u' = x^2 + 2\frac{x}{u} + \frac{1}{u^2} - x^2$$

$$u' = -2xu - 1$$ (*5)

Lösen dieser DGL :

Zuerst die Lösung der zugehörigen homogenen DGL :

$$\frac{du}{dx} = -2xu$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u}du = -2\int x dx + C$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -x^2 + C$$

$$\Rightarrow |u| = e^{-x^2} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow u = C \cdot e^{-x^2}$$ Betrag fä llt weg, da C beliebige Konstante ist

Nun Lösung der inhomogenen DGL (dazu Variation der Konstanten) :

$$u = C(x) \cdot e^{-x^2}$$ (*6)

$$\Rightarrow u' = C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot (-2x \cdot e^{-x^2})$$ (*7)

zu 8.3 b)

Die Gleichungen (*6) und (*7) in (*5) einsetzen :

$$C'(x)\cdot e^{-x^2} + C(x)\cdot(-2x\cdot e^{-x^2}) = -2x\cdot C(x)\cdot e^{-x^2} - 1$$

$$\Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{e^{-x^2}} = -e^{x^2}$$

$$\Rightarrow C(x) = -\int e^{x^2}dx + C$$

Einsetzen in (*6) :

$$u = \left(-\int e^{x^2}dx + C\right)\cdot e^{-x^2}$$

Rücksubstitution :

$$y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{y-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-x} = \left(-\int e^{x^2}dx + C\right)\cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow 1 = -y\cdot e^{-x^2}\cdot\left(\int e^{x^2}dx + C\right) + x\cdot e^{-x^2}\cdot\left(\int e^{x^2}dx + C\right)$$

$$\Rightarrow y\cdot e^{-x^2}\cdot\left(\int e^{x^2}dx + C\right) = x\cdot e^{-x^2}\cdot\left(\int e^{x^2}dx + C\right) - 1$$

$$\Rightarrow y = x - \frac{e^{x^2}}{\int e^{x^2}dx + C}$$

8.3 c)

Lösen der DGL $y = y'^2 + x(y'+1)$

$\longrightarrow$ d'Alembertsche Differentialgleichung

??? ....Lösungsansatz.... ???

8.3 d)

Lösen der DGL $\left(\frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \left(\frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

Zur detaillierten Beschreibung des Lösungsverfahrens siehe 8.4 b) .

$$P(x,y) := \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2} \qquad Q(x,y) := \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{2x}{y^2} - \frac{2y}{x^2} \qquad \frac{dQ}{dx} = -\frac{2y}{x^2} - \frac{2x}{y^2}$$

Wegen $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ ist die DGL exakt / totales Differential.

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = P(x,y) = \frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow F = \int\left(\frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + j\,(y) \qquad (*8)$$

zu 8.3 d)
Anstelle einer beliebigen Integrationskonstanten C wird hier eine beliebige integrierbare Funktion $j(y)$ verwendet.

$j(y)$ lässt sich aus der Beziehung $\frac{dF}{dy} = Q(x,y)$ bestimmen :

$$\frac{dF}{dy} = \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = j'(y) + \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$$
$$\Rightarrow j'(y) = 0$$
$$\Rightarrow j(y) = C_2$$

Setzt man diese Beziehung in (*8) ein, erhält man die Lösungskurven.
Da die Differentialgleichung ein totales Differential ist, liefert die Gleichung $F(x,y) = C_1$. sämtliche Lösungen.

D.h. $C_1 = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + C_2$

Somit sind die Lösungskurven $\underline{\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = C}$ bzw. $\underline{x^3 + y^3 - Cxy = 0}$.

8.4 a)
gegeben :

$M(z) = M(x^2 + y^2) \neq 0 \qquad z = x^2 + y^2$

$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 \qquad f, g \in C^1$

$\Rightarrow M_x = 2x \cdot M' \qquad$ und $\qquad M_y = 2y \cdot M'$

Die Differentialgleichung $(M \cdot f(x,y))dx + (M \cdot g(x,y))dy = 0$ ist genau dann exakt, wenn gilt :

$$(M \cdot f(x,y))_y = (M \cdot g(x,y))_x$$
$$\Leftrightarrow M_y \cdot f + M \cdot f_y = M_x \cdot g + M \cdot g_x$$
$$\Leftrightarrow M_x \cdot g - M_y \cdot f = M(f_y - g_x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{M_x}{M} g - \frac{M_y}{M} f = f_y - g_x$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x \cdot M'}{M} g - \frac{2y \cdot M'}{M} f = f_y - g_x$$
$$\Leftrightarrow \frac{M'}{M} = \frac{f_y - g_x}{2x \cdot g - 2y \cdot f} \qquad , mit\ x \cdot g \neq y \cdot f$$
$$\Leftrightarrow (\ln M)' = \frac{f_y - g_x}{2(x \cdot g - y \cdot f)}$$
$$\ln M = \int \frac{f_y - g_x}{\underbrace{2(x \cdot g - y \cdot f)}_{F}} dz$$

F darf nur von $z = x^2 + y^2$ abhängen, da der Multiplikator M die Gleichung sonst nicht in eine exakte Gleichung überführen kann.

Es gilt : $M(x^2 + y^2) = e^{\int \frac{f_y - g_x}{2(x \cdot g - y \cdot f)} dz}$

8.4 b)

gegeben : $\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)dx+\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)dy=0$ (*9)

setze $f:=\sqrt{x^2+y^2}-x$ $\qquad g:=\sqrt{x^2+y^2}-y$

$$\Rightarrow f_y=2y\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{und} \quad g_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\Rightarrow$ DGL nicht exakt, da $f_y\neq g_x$

$$\Rightarrow (\ln M)' = \frac{f_y-g_x}{2(x\cdot g-y\cdot f)}=\frac{\frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\left(x\sqrt{x^2+y^2}-xy-y\sqrt{x^2+y^2}+xy\right)}$$

$$=\frac{y-x}{2\sqrt{x^2+y^2}\left((x-y)\sqrt{x^2+y^2}\right)}=-\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}=-\frac{1}{2z} \qquad ,mit\ z=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow \ln M=\int-\frac{1}{2z}dz=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{z}dz=-\frac{1}{2}\ln z$$

$$\Rightarrow M=e^{-\frac{1}{2}\ln z}=e^{\ln z^{-\frac{1}{2}}}=z^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$\Rightarrow M=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Nach Multiplikation beider Seiten der Gleichung (*9) mit $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ erhält man die exakte DGL :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)\right)\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{d.h.}$$

$$\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\left(1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0 \qquad (*10)$$

Noch prüfen, ob (*10) ein totales Differential ist :

Es ist $P(x,y)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $Q(x,y)=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Also ist

$$\frac{dP}{dy}=-x\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-x\cdot 2y\cdot\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{und}$$

$$\frac{dQ}{dx}=-y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-y\cdot 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Und somit $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ also ist die Differentialgleichung (*10) exakt.

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx}=P(x,y) \qquad \text{und} \qquad \frac{dF}{dy}=Q(x,y)$$

Aus der ersten Beziehung folgt

$$\frac{dF}{dx}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow F=\int\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx=x-\sqrt{x^2+y^2}+j(y) \qquad (*11)$$

Anstelle einer beliebigen Integrationskonstanten C wird hier eine beliebige integrierbare Funktion $j(y)$ verwendet.

zu 8.4 b)

$j(y)$ lässt sich aus der obigen zweiten Beziehung bestimmen :

$$\frac{dF}{dy} = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = j\,'(y) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow j\,'(y) = 1$$

$$\Rightarrow j(y) = y$$

Setzt man diese Beziehung in (*11) ein, erhält man $F(x,y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$

Da (*10) ein totales Differential ist, liefert die Gleichung $F(x,y) = C$ sämtliche Lösungen der DGL.

D.h. $C = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Rightarrow (C - x - y)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow C^2 - Cx - Cy - Cx + x^2 + xy - Cy + xy + y^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow C^2 - 2Cx - 2Cy + 2xy = 0$$

$$\Rightarrow y(2x - 2C) = 2Cx - C^2$$

$$\Rightarrow \underline{y = \frac{C(2x - C)}{2(x - C)}}$$