Analysis 3 – Serie06 – Georg Kuschk

6.3 a)

$$y' = \frac{1}{2y-2}$$

Die rechte Seite ist für $y = 1$ nicht definiert.

(Streng genommen müssten also die Bereiche $y > 1$ und $y < 1$ getrennt untersucht werden)

Lösen der DLG :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-2} \Rightarrow (2y-2)dy = dx \qquad (2y-2 \neq 0 \ \textit{für} \ y \neq 1)$$

$$\Rightarrow \int (2y-2)dy = \int dx + C$$

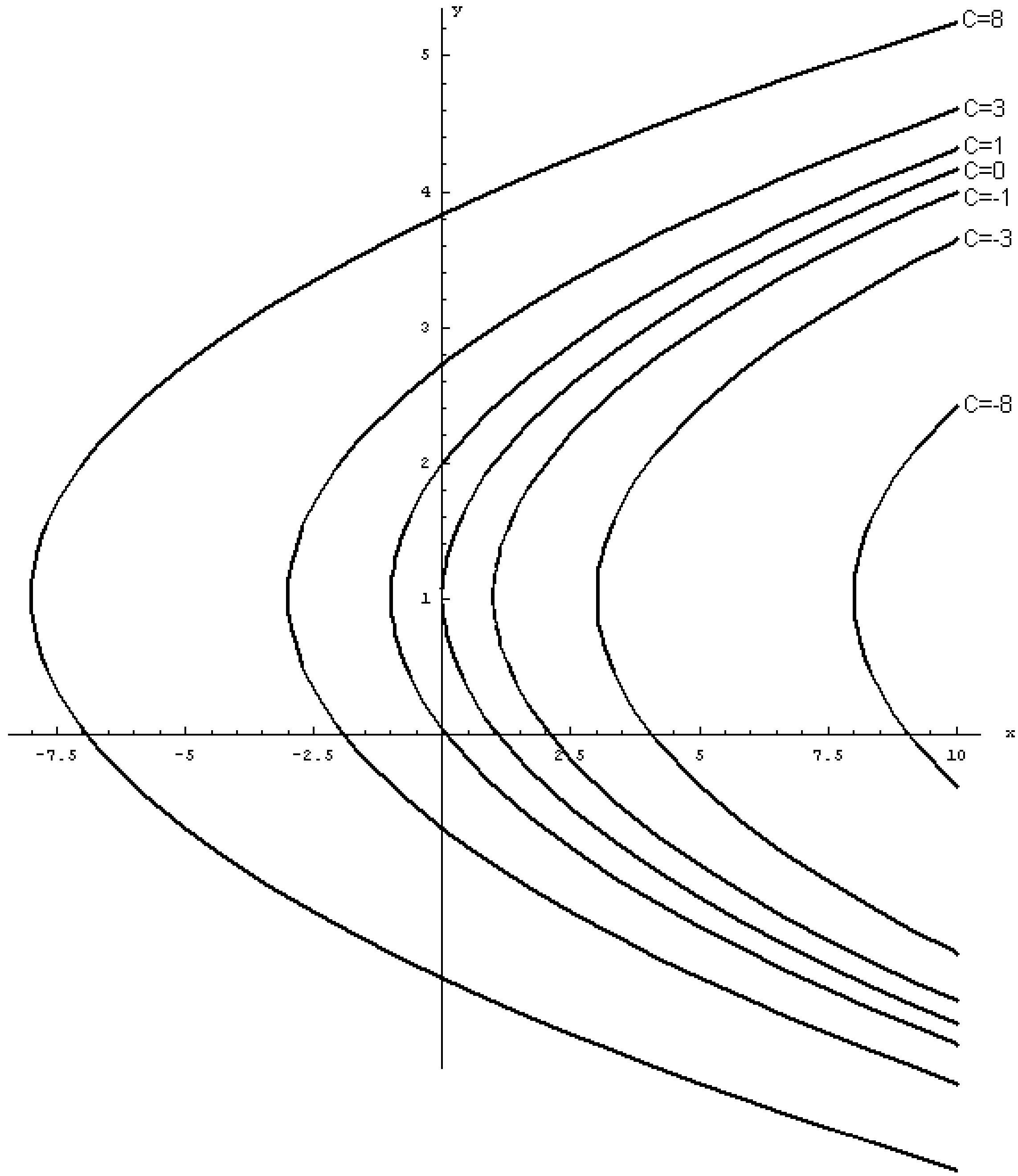
$$\Rightarrow y^2 - 2y = x + C$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 - 1 = x + C$$

$$\Rightarrow y - 1 = \sqrt{x + C + 1}$$

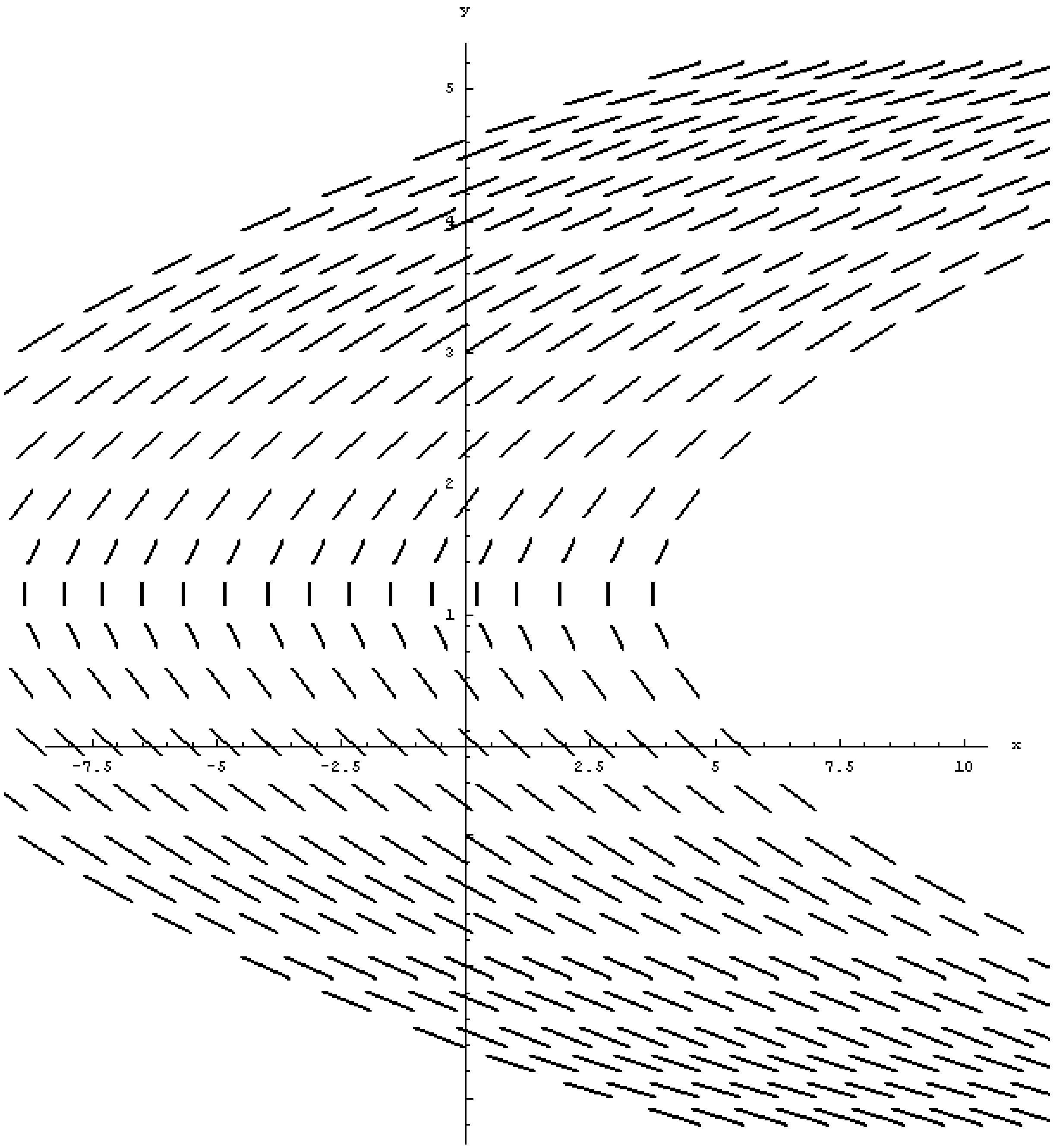
$$\underline{\Rightarrow y = \sqrt{x+C} + 1} \qquad (\textit{für} \ y \neq 1)$$

zu 6.3 a)
Einige Lösungskurven :



zu 6.3 a)

Richtungsfeld :



6.3 b)

$y' = -y + x + 1$ (*1)

$\Rightarrow$ Inhomogene DGL der Art $y' = g(x) \cdot y + h(x)$ $\quad mit\ g(x) = -1\ und\ h(x) = x + 1$

Zuerst die zugehörige homogene lineare DGL lösen $(d.h.\quad h(x) \equiv 0)$:

$$y' = -y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = (-1)dx \qquad (f\ddot{u}r\ y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int dx + C$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -x + C$$

$\Rightarrow y = e^{-x+C}$ (Betrag überflüssig, da Potenz immer positiv)

$$\Rightarrow y = e^{C} \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{-x}$$

Nun die inhomogene DGL lösen :

Ansatz : Statt der Konstanten C setzt man die zu bestimmende unbekannte Funkton $u(x)$

D.h. $y = u(x) \cdot e^{-x}$ (*2)

$\Rightarrow y' = u'(x) \cdot e^{-x} - u(x) \cdot e^{-x}$ (*3)

Einsetzen von (*2) und (*3) in (*1) liefert :

$$u'(x) \cdot e^{-x} - u(x) \cdot e^{-x} = -u(x) \cdot e^{-x} + x + 1$$

$$\Rightarrow u'(x) \cdot e^{-x} = x + 1$$

$$\Rightarrow u'(x) = xe^{x} + e^{x}$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_0^x \left(te^t + e^t\right) dt + C = \int_0^x te^t dt + \int_0^x e^t dt = \left[te^t - e^t\right]_0^x + \left[e^t\right]_0^x + C$$

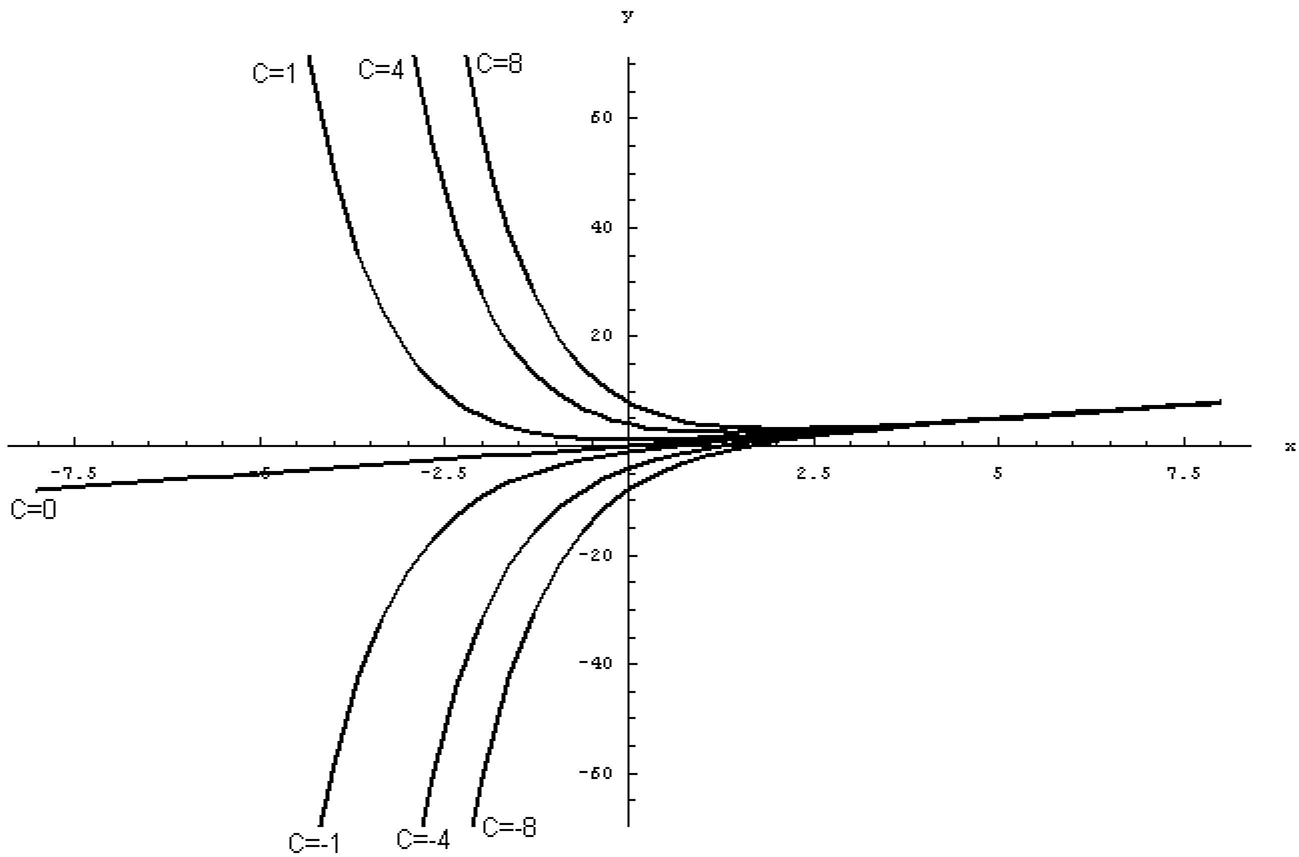
$$= xe^x - e^x + e^x + C = xe^x + C$$

Einsetzen in (*2) liefert :

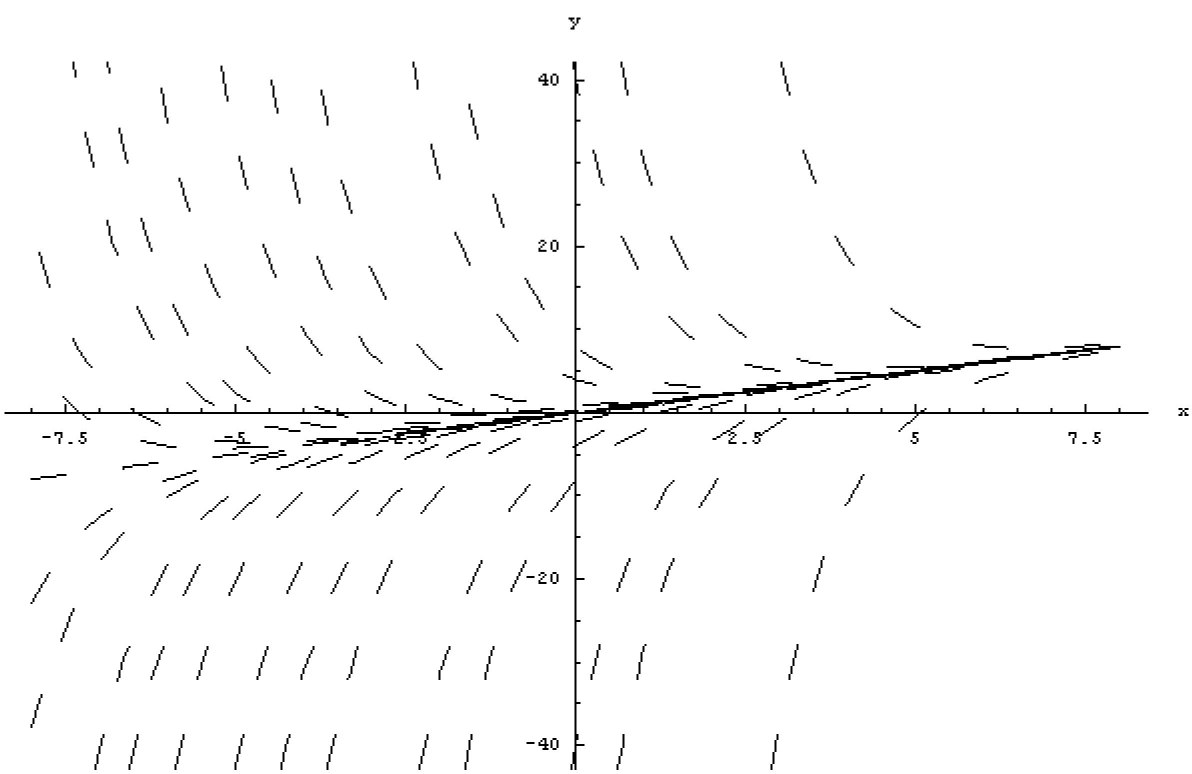
$$y(x) = u(x) \cdot e^{-x} = \left(xe^x + C\right) \cdot e^{-x} \underline{= C \cdot e^{-x} + x}$$

zu 6.3 b)

Einige Lösungskurven :



Richtungsfeld :



6.4 a)

$y(x)^2 = Cx \Rightarrow y(x)^2 - Cx = 0$ (*1)

Ableiten nach x liefert :

$2y(x) \cdot y(x)' - C = 0$ (*2)

Gleichung (*2) nach C umstellen :

$C = 2yy'$

und in (*1) einsetzen :

$y^2 - 2yy'x = 0$

$\Rightarrow y - 2y'x = 0$

$\underline{\Rightarrow y' = \frac{y}{2x}}$ $\quad (\mathit{für}\ x \neq 0)$

6.4 b)

$x^2 + y^2 = C \Rightarrow y^2 + x^2 - C = 0$

Ableiten nach x liefert :

$2yy' + 2x = 0$

Hieraus folgt sofort die DGL :

$\underline{y' = -\frac{x}{y}}$ $\quad (\mathit{für}\ y \neq 0)$

6.4 c)

$ye^{-x} - C_1 - C_2x - C_3x^2 = 0$

$\Rightarrow y(-e^{-x}) + y'(e^{-x}) - C_2 - 2C_3x = 0$

$\Rightarrow ye^{-x} + y'(-e^{-x}) + y'(-e^{-x}) + y''(e^{-x}) - 2C_3 = 0$

$= ye^{-x} + 2y'(-e^{-x}) + y''(e^{-x}) - 2C_3 = 0$

$\Rightarrow y(-e^{-x}) + y'(e^{-x}) + 2y'(e^{-x}) + 2y''(-e^{-x}) + y''(-e^{-x}) + y'''(e^{-x}) = 0$

$\Rightarrow -y + 3y' - 3y'' + y''' = 0$

$\underline{\Rightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0}$