<u>Analysis 3 – Serie05 – Georg Kuschk</u>

5.1 a)

$f(x) = x$

Wegen Kosinusreihe ist $b_n = 0$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(nx)dx$$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ ist eine gerade Funktion, da cos(x) gerade Funktion ist. ($f(-x) = f(x)$)

$\Rightarrow f(x) = -x$ in $[-p,0]$ (D.h. $f(x) = |x|$ in $[-p,p]$)

Also $a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{p}\left(\int_{-p}^{0} -x\cos(nx)dx + \int_{0}^{p} x\cos(nx)dx\right) = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} x\cos(nx)dx$

$= \frac{2}{p}\left(\left(\frac{\sin(nx)}{n}\cdot x\right)\Big|_0^p - \int_0^p \frac{\sin(nx)}{n}dx\right)$ (Produktintegration)

$= -\frac{2}{p}\frac{1}{n}\int_0^p \sin(nx)dx = -\frac{2}{pn}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Big|_0^p = \frac{2}{pn^2}\left(\cos(np) - 1\right)$

$= \frac{2}{pn^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{p(2k-1)^2} & \text{für } n = 2k-1 \\ 0 & \text{für } n = 2k \end{cases}$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p x\cos(0)dx = \frac{2}{p}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^p = p$$

$$\Rightarrow f(x) = |x| \sim \frac{p}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{p(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

Funktion ist gerade, also $f(-p) = f(p)$.

5.1 b)

$f(x) = x$

Wegen Sinusreihe ist $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin(nx)dx$$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ ist eine ungerade Funktion, da sin(x) ungerade Funktion ist. ($f(-x) = -f(x)$)

$\Rightarrow f(x) = x$ in $[-p,p]$

Also $b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{p}\left(\int_{-p}^{p} x\sin(nx)dx\right)$

$= \frac{1}{p}\left(\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\cdot x\right)\Big|_{-p}^{p} - \int_{-p}^{p} -\frac{\cos(nx)}{n}dx\right)$ (Produktintegration)

$$= -\frac{1}{p}\frac{1}{n}\left(\left(p \cdot \cos(np) + p \cdot \cos(-np)\right) - \int_{-p}^{p} \cos(nx)dx \right)$$

$$= -\frac{1}{pn}\left(\left(p \cdot \cos(np) + p \cdot \cos(-np)\right) + \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-p}^{p} \right)$$

$$= -\frac{1}{pn}\left(p \cdot \cos(np) + p \cdot \cos(np)\right)$$

$$= -\frac{2}{n}\cos(np) = \frac{2}{n}(-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\sin(nx)}{n}$$

$$f(p) = f(-p) = 0$$

<u>**5.3 a)**</u> gegeben : $x_n \to x$ zu zeigen : $\|x_n\| \to \|x\|$

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \le \|x_n - x\| + \|x\|$$

$$\le e + \|x\| \qquad \forall n \ge n_0(e), \quad e > 0$$

$$\Rightarrow \|x_n\| - \|x\| \le e$$

$$\underline{\Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|}$$ q.e.d.

5.3 b) gegeben : $x_n \to x$ zu zeigen : $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ $(y \in H)$

$x_n \to x \;\Rightarrow\; x_n - x \to 0 \;\Rightarrow\; \langle x_n - x, y\rangle \to 0$, denn $\langle 0, y\rangle = 0$

$\Rightarrow\; \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle \to 0 \;\Rightarrow\; \underline{\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle}$ q.e.d.

5.3 c) gegeben : $x_n \to x$, $y_n \to y$ zu zeigen : $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

Es gilt $|\langle x, y\rangle - \langle u, v\rangle| \le \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle$ $\forall x, y, u, v \in H$ (*1)

$e > 0$ sei fest, beliebig gewählt. Wegen $x_n \to x$ und $y_n \to y$ existiert ein $n_0(e) \in N$

mit $\langle x_n, x\rangle \le \frac{e}{2}$ und $\langle y_n, y\rangle \le \frac{e}{2}$ $\forall n \ge n_0(e)$

Mit (*1) folgt nun $|\langle x, y\rangle - \langle u, v\rangle| \le \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$ $\forall n \ge n_0(e)$

D.h. $\underline{\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle}$ q.e.d.

5.4)

Folgenraum l^2 :

Raum aller Zahlenfolgen $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ mit konvergenter Quadratsumme $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^{\ 2} < \infty$,

Innenprodukt $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ und der Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots}$

<u>Beweis der Vollständigkeit :</u>

Sei (x^k) eine Cauchyfolge in l^2 , $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots)$.

Zu jedem festen, beliebig gewähltem $e > 0$ existiert ein $n_0(e) \in N$, so daß

$$\left|x^k - x^l\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j^k - x_j^l)^2 < e^2 \qquad \forall k, l \geq n_0(e)$$

Hieraus folgt $\left|x_1^k - x_1^l\right| < e$ für $k, l \geq n_0(e)$, d.h. die Folge (x_1^k) der ersten Komponenten ist eine Cauchyfolge, und es existiert $a_1 = \lim_{k \to \infty} x_1^k$.

Analog existiert für ein beliebiges festes j der Limes $a_j := \lim_{k \to \infty} x_j^k$.

Nun ist zu zeigen, daß die Folge (x^k) gegen $a := (a_1, a_2, \ldots)$ strebt :

Für festes m ist $\sum_{j=1}^{m} (x_j^k - x_j^l)^2 < e^2 \qquad \forall k, l \geq n_0(e)$

$\Rightarrow$ für $l \to \infty$ ist $\sum_{j=1}^{m} (x_j^k - a_j)^2 \leq e^2$

$\Rightarrow$ da m beliebig : $\sum_{j=1}^{\infty} (x_j^k - a_j)^2 = \left\|x^k - a\right\|^2 \leq e^2 \qquad$ für $k \geq n_0(e)$

Es gilt also $\left\|x^k - a\right\| \to 0$ bzw. $x^k \to a$ für $k \to \infty$ in l^2 .

Mit x^k und $x^k - a$ ist nun auch $a = x^k - (x^k - a)$ Element des Vektorraumes l^2 .

$\Rightarrow$ Der Folgenraum l^2 ist vollständig.