Analysis 3 – Serie03 – Georg Kuschk

3.1)

Es gilt :

$\underline{0 \le z \le 5}$

$|x| \le \sqrt{9-y^2}$ d.h. $\underline{-\sqrt{9-y^2} \le x \le \sqrt{9-y^2}}$ sowie

$y^2 \le 9$ d.h. $\underline{-3 \le y \le 3}$

Das Vektorfeld f ist im R^3 beliebig oft stetig differenzierbar.
Desweiteren ist Z ein Normalbereich bzgl. der (x,y)-Ebene.

Gaußscher Integralsatz :

$$\iiint\limits_V div(\vec{f})dxdydz = \iint\limits_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{n} dO \qquad (*1)$$

Die Divergenz des Vektorfeldes f ist

$$div(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = f_{1,x} + f_{2,y} + f_{3,z} = 1+1+1=3$$

Für die linke Seite der Gleichung (*1) gilt somit :

$$\iiint\limits_V div(\vec{f})dxdydz = \int_0^5 \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} 3dxdydz = 6\int_0^5 \int_{-3}^3 \sqrt{9-y^2}dydz$$

$$= 6\int_0^5 \left(\frac{y}{2}\sqrt{9-y^2} + \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{y}{3}\right)\right)\Bigg|_{-3}^{3} dz = 6\int_0^5 \left(\left(0+\frac{9}{2}\arcsin(1)\right) - \left(0+\frac{9}{2}\arcsin(-1)\right)\right)dz$$

$$= 27\int_0^5 (\arcsin(1) - \arcsin(-1))dz = 27p\int_0^5 dz = \underline{135p}$$

Für die rechte Seite der Gleichung (*1) gilt :

Das Oberflächenintegral wird berechnet, indem die Mantelfläche und die Deckflächen des Zylinders getrennt untersucht werden.
Die obere Deckfläche F^+ wird durch z=5 , die untere Deckfläche F^- durch z=0 charakterisiert, die Mantelfläche F^M durch $x^2 + y^2 = 9$. (der Radius ist also 3)

$\underline{F^+ :}$

Der Normalenvektor zeigt Richtung wachsender z-Koordinate, d.h. $\vec{n} = (0,0,1)$.

$$\iint\limits_{F^+} (\vec{f} \cdot \vec{n})dF^+ = \iint\limits_{F^+} \begin{pmatrix} x+y \\ y+5 \\ 5+x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dxdy = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (x+5)dxdy$$

$$= \int_{-3}^3 \left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy = \int_{-3}^3 \left(\left(\frac{9-y^2}{2} + 5\sqrt{9-y^2}\right) - \left(\frac{9-y^2}{2} - 5\sqrt{9-y^2}\right)\right)dy$$

$$= 10\int_{-3}^{3}\sqrt{9-y^2}\,dy = 10\left(\frac{y}{2}\sqrt{9-y^2}+\frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{y}{3}\right)\right)\Bigg|_{-3}^{3}$$

$$= 10\left(\left(0+\frac{9}{2}\arcsin(1)\right)-\left(0+\frac{9}{2}\arcsin(-1)\right)\right) = 45\left(\arcsin(1)-\arcsin(-1)\right) = \underline{45p}$$

$\underline{F^{-}:}$

Der Normalenvektor zeigt Richtung fallender z-Koordinate, d.h. $\vec{n}=(0,0,-1)$.

$$\int\int_{F^-}\left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)dF^- = \int\int_{F^-}\begin{pmatrix}x+y\\ y+0\\ 0+x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}dxdy = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}(-x)\,dxdy = -\int_{-3}^{3}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}dy$$

$$= -\int_{-3}^{3}\left(\frac{9-y^2}{2}-\frac{9-y^2}{2}\right)dy = \underline{0}$$

$\underline{F^{M}:}$

zweckmässig : Koordinatentransformation zu Zylinderkoordinaten

$x = r\cdot\cos j$ $\quad$ $y = r\cdot\sin j$ $\quad$ $z = z$ $\quad$ (mit r = 3), d.h.

$x = 3\cos j$ $\quad$ $y = 3\sin j$ $\quad$ $z = z$

Normalenvektor berechnen :

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial j}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial z}\right) \qquad \text{(r = 3 = const)}$$

$$= \left(\begin{pmatrix}-3\sin j\\ 3\cos j\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\cos j\cdot 1-0\cdot 0\\ 0\cdot 0-(-3\sin j)\cdot 1\\ -3\sin j\cdot 0-3\cos j\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cos j\\ 3\sin j\\ 0\end{pmatrix}$$

Also

$$\int\int_{F^M}\left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)dF^M = \int\int_{F^M}\begin{pmatrix}3\cos j+3\sin j\\ 3\sin j+z\\ z+3\cos j\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\cos j\\ 3\sin j\\ 0\end{pmatrix}dxdy$$

$$= \int_{j=0}^{2p}\int_{z=0}^{5}\left(9\cos^2 j+9\sin j\cos j+9\sin^2 j+3z\sin j\right)dz\,dj$$

$$= \int_{0}^{2p}\int_{0}^{5}(9+9\sin j\cos j+3z\sin j)\,dz\,dj = \int_{0}^{2p}\left(\frac{9}{2}z(\sin 2j+2)+\frac{3}{2}z^2\sin j\right)\Bigg|_{0}^{5}dj$$

$$= \int_{0}^{2p}\left(\left(\frac{45}{2}(\sin 2j+2)+\frac{75}{2}\sin j\right)-0\right)dj = \int_{0}^{2p}\left(45+\frac{45}{2}\sin 2j+\frac{75}{2}\sin j\right)dj$$

$$= \left(45j - \frac{45}{4}\cos 2j - \frac{75}{2}\cos j \right)\Big|_0^{2p} = \left(90p - \frac{45}{4} - \frac{75}{2}\right) - \left(-\frac{45}{4} - \frac{75}{2}\right) = \underline{90p}$$

Addiert man diese 3 Oberflächenintegrale, so erhält man für die rechte Seite aus (*1)

$$\int\int_{\partial V} \vec{f} \cdot \vec{n} dO = F^{+} + F^{-} + F^{M} = 45p + 0 + 90p = \underline{135p}$$

Womit der Gaußsche Integralsatz für den gegebenen Zylinder und das gegebene Vektorfeld verifiziert ist.

3.4)

Das Vektorfeld f ist im R^3 beliebig oft stetig differenzierbar und es gilt

$$rot(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = (f_{3y} - f_{2z}, f_{1z} - f_{3x}, f_{2x} - f_{1y}) = (0-1, 0-1, 0-1) = (-1,-1,-1)$$

F ist offen und messbar.
Eine Parameterdarstellung für F ist

$$(x, y, z) = \Phi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2) \qquad \text{mit } x^2 + y^2 \le 1$$

es folgt : $|x| \le \sqrt{1-y^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}}$ und $y^2 \le 1$ d.h. $\underline{-1 \le y \le 1}$

Da Φ eine Fläche im R^3 beschreibt , (Φ ist injektiv , stetig differenzierbar und lipschitz-stetig) und der Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{\Phi_x \times \Phi_y}{|\Phi_x \times \Phi_y|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\2x\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-2y\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\2x\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-2y\end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\cdot(-2y) - 2x\cdot 1\\ 2x\cdot 0 - 1\cdot(-2y)\\ 1\cdot 1 - 0\cdot 0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\cdot(-2y) - 2x\cdot 1\\ 2x\cdot 0 - 1\cdot(-2y)\\ 1\cdot 1 - 0\cdot 0\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}-2x\\2y\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$ in Richtung wachsender z-Koordinate zeigt

gilt nach dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\Phi = F} \vec{n} \cdot rot(\vec{f}) dO = \int_{\partial\Phi = \partial F} \vec{f} d\vec{s} \qquad (*2)$$

Für die linke Seite der Gleichung (*2) gilt :

$$\int_{\Phi} \vec{n} \cdot rot(\vec{f})dO \;=\; \int_{\Phi} \frac{\Phi_x \times \Phi_y}{\left|\Phi_x \times \Phi_y\right|} \cdot rot(\vec{f})dO \qquad \text{mit} \quad dO = \left|\Phi_x \times \Phi_y\right| dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left\langle (-2x,2y,1),(-1,-1,-1)\right\rangle dxdy \;=\; \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (2x-2y-1)dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x^2 - x(2y+1)\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\left(1-y^2-\sqrt{1-y^2}\cdot(2y+1)\right) - \left(1-y^2+\sqrt{1-y^2}\cdot(2y+1)\right)\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-2\sqrt{1-y^2}\cdot(2y+1)\right)dy$$

$$= \left[-2\left(\sqrt{1-y^2}\cdot\left(\frac{2y^2}{3}+\frac{y}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{\arcsin(y)}{2}\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(-2\left(\frac{\arcsin(1)}{2}\right)\right) - \left(-2\left(\frac{\arcsin(-1)}{2}\right)\right) \;=\; -\arcsin(1)+\arcsin(-1) \;=\; -p$$

Für die rechte Seite der Gleichung (*2) gilt :

Parameterdarstellung der Randkurve ∂F :
$(x,y,z) \;=\; g(j) \;=\; (\cos(j),\sin(j),\cos(2j)) \qquad , \qquad j \in [0,2p]$

Die Randkurve ∂F wird hierbei bzgl. des Normalenvektorfeldes $\begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$ positiv orientiert durchlaufen.

Also :

$$\int_{\partial F} \vec{f} d\vec{s} \;=\; \int_0^{|g|} f(g(j)) \cdot g'(j)dj \qquad , \qquad |g| = 2p$$

$$= \int_0^{2p} \left\langle (\sin(j),\cos(2j),\cos(j)),(-\sin(j),\cos(j),-2\sin(2j))\right\rangle dj$$

$$= \int_0^{2p} \left(-\sin^2(j)+\cos(j)\cdot\cos(2j)-\cos(j)\cdot 2\sin(2j)\right)dj$$

$$= \int_0^{2p} \left(-\sin^2(j)+\cos(j)\cdot(\cos(2j)-2\sin(2j))\right)dj$$

$$= \left[-\frac{j}{2}+\frac{1}{4}\sin(2j)+\cos(2j)+\frac{\sin(j)}{2}+\frac{1}{6}\sin(3j)\right]_0^{2p}$$

$$= (-p+0+1+0+0)-(0+0+1+0) \;=\; \underline{-p}$$

Womit der Stokessche Integralsatz für die gegebene Fläche und das gegebene Vektorfeld verifiziert ist.