Analysis 3 – Serie01 – Georg Kuschk

1.1 a)

$f(x,y) = xe^{xy}$ ist R-integrierbar und desweiteren existieren die Integrale

$$\int_0^1 f(x,y)dx = e^{xy}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{ye^y - e^y + 1}{y^2} \text{ sowie}$$

$$\int_{-1}^0 f(x,y)dy = e^{xy}\Big|_{-1}^0 = 1 + \frac{1}{e^x}$$

Die Integrationsreihenfolge ist somit nach Fubini egal.

Also ist $\int_D\int xe^{xy}dxdy = \int_0^1\int_{-1}^0 xe^{xy}dydx = \int_0^1 e^{xy}\Big|_{-1}^0 dx = \int_0^1 (1-e^{-x})dx$

$$= (x+e^{-x})\Big|_0^1 = 1 + e^{-1} - e^0 = \frac{1}{e}$$

1.1 b)

$4x^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad |y| = \sqrt{4(1-x^2)} = 2\sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$, da $x, y \in R$

und $-2\sqrt{1-x^2} \le y \le 2\sqrt{1-x^2}$

$f(x,y) = y^2$ ist R-integrierbar und desweiteren existieren die Integrale

$$\int_{-1}^1 f(x,y)dx = xy^2\Big|_{-1}^1 = 2y^2 \quad \text{sowie} \quad \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{16}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$$

Die Integrationsreihenfolge ist somit nach Fubini egal.

.... rechnen ... arcsin umformen ...

$= 2p$

1.2)

Die Punkte von dem Tetraeder T sind durch

$0 \le x \le 1$,

$0 \le y \le 1-x$ und

$0 \le z \le 1-x-y$ charakterisiert.

$$\Rightarrow \quad \int_T \frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dzdydx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} - \frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} dydx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y+1-x-y)^2}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dydx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dydx = -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{1+x+1-x}-\frac{1}{1+x}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{3-x}{4}-\frac{1}{1+x}\right)dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{8}-\ln(x+1)\right)\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\ln(2)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}-\ln(2)\right) = \underline{\frac{\ln(2)}{2}-\frac{5}{16}}$$

1.3)

$$S_a^{(n)} = \{x \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq a\}$$

Beweis per Induktion :

IB : $S_a^{(n)} = \frac{a^n}{n!}$

IA : n=1

IS : $S_a^{(n+1)} = \int_{x_{n+1}=0}^{a}\left|S_{a-x_{n+1}}^{n}\right|dx_{n+1} = \int_0^a \frac{1}{n!}(a-x_{n+1})^n dx_{n+1} = \frac{1}{n!}\left[-\frac{(a-x_{n+1})^{n+1}}{n+1}\right]_0^a$

$$= \frac{1}{(n+1)!}(-(a-a)^{n+1}+(a-0)^{n+1}) = \underline{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$$ q.e.d

1.4)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \int_0^1\int_a^b x^y dydx$$

$f(x,y) = x^y$ ist auf $[0,1]\times[a,b]$ R-integrierbar und desweiteren existieren die Integrale

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \frac{x^{y+1}}{y+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{y+1} \quad \text{sowie} \quad \int_a^b f(x,y)dy = \frac{x^y}{\ln x}\Bigg|_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

zu 1.4)

Die Integrationsreihenfolge kann also nach dem Satz von Fubini vertauscht werden.

Somit ist

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \;=\; \int_0^1\int_a^b x^y\,dydx \;=\; \int_a^b\int_0^1 x^y\,dxdy \;=\; \int_a^b \frac{1}{y+1}\,x^{y+1}\Big|_0^1\,dy \;=\; \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy$$

$$= \ln(y+1)\Big|_a^b \;=\; \underline{\ln(b+1)-\ln(a+1)}$$

1.5)

Gegeben :
die Parabeln $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$
sowie das von ihnen für $0 < p < q$ und $0 < a < b$ begrenzte Viereck A.
Gesucht : Flächeninhalt von A

Zunächst einmal ist es zweckmässig zu einem neuen Koordinatensystem (u,v) überzugehen, welches die angegebenen Parabeln als Koordinatenlinien u=const bzw. v=const besitzt.

Setze $u = \dfrac{y^2}{x}$ und $v = \dfrac{x^2}{y}$

Auflösen nach (x,y) :

I : $x = \dfrac{y^2}{u}$ II : $y = \dfrac{x^2}{v}$

II in I eingesetzt : $x = \dfrac{x^4}{uv^2}$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{uv^2}$ eindeutig bestimmt in R, da u,v>0

$(u \in [p,q], v \in [a,b])$ und 0<p<q sowie 0<a<b

I in II eingesetzt : $y = \dfrac{y^4}{u^2 v}$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt[3]{u^2 v}$ eindeutig bestimmt in R, da u,v>0

$\rightarrow$ $(x,y) = \Phi(u,v) = \left(\sqrt[3]{uv^2}, \sqrt[3]{u^2 v}\right)$

Φ ist bijektive stetig differenzierbare Abbildung von $(0,\infty)\times(0,\infty)$ auf sich selbst.

$\Rightarrow$ Funktionaldeterminante berechnen :

$$\det \Phi'(u,v) = \left|\begin{pmatrix} \dfrac{(uv^2)^{1/3}}{du} & \dfrac{(uv^2)^{1/3}}{dv} \\ \dfrac{(u^2v)^{1/3}}{du} & \dfrac{(u^2v)^{1/3}}{dv} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}(u^{-2/3}v^{2/3}) & \dfrac{2}{3}(u^{1/3}v^{-1/3}) \\ \dfrac{2}{3}(u^{-1/3}v^{1/3}) & \dfrac{1}{3}(u^{2/3}v^{-2/3}) \end{pmatrix}\right|$$

zu 1.5)

$$= \frac{1}{3}\left(u^{-2/3}v^{2/3}u^{2/3}v^{-2/3}\right) - \frac{2}{3}\left(u^{1/3}v^{-1/3}u^{-1/3}v^{1/3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$\longrightarrow$ Der gesuchte Flächeninhalt ist $\int_A d(x,y) = \int_{u=p}^{q}\int_{v=a}^{b} \left|\det \Phi'(u,v)\right| dv\,du \;\; \underline{= \frac{1}{3}(b-a)(q-p)}$